

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

THÈSE

En vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE DES PONTS ET CHAUSSEES

Spécialité: Structures et matériaux

Présentée par:

Abdelkader HAMMOUTI

Sujet de la thèse :

**Simulation numérique directe en différence finie de
l'écoulement d'un fluide incompressible en présence
d'interfaces rigides**

Soutenue à Champs-sur-Marne le 17 Décembre 2009

Après avis de :

Frédéric Gibou	Professeur, Université de Californie	Rapporteur
Philippe Peyla	Professeur, Université Joseph Fourier	Rapporteur

Devant le jury composé de :

Mikhaël Balabane	Professeur,	Université Paris-Nord	Examineur
Olivier Botella	Maitre de Conférence,	ENSEM-INPL	Examineur
Robert Eymard	Professeur,	Université Paris-Est MLV	Président
Anaël Lemaitre	HDR	Ecole des Ponts ParisTech	Directeur de thèse
Philippe Peyla	Professeur,	Université Joseph Fourier	Rapporteur
Rudolfo R. Rosales	Professeur,	MIT Massachussetts	Examineur

Table des matières

Remerciements	vii
Introduction générale	1
1 Etat de l'Art : Les méthodes de résolution des écoulements incompressibles et les problèmes de localisation d'interface	7
1.1 Méthodes de résolution des écoulements incompressibles	8
1.1.1 Méthode de Projection de type Chorin-Temam	9
1.1.2 Méthode de Projection d'ordre supérieur	12
1.1.2.1 Avec une condition exacte en vitesse	12
1.1.2.2 Avec une condition exacte en pression	13
1.1.2.3 Schéma basé sur une formulation de pression graduée	14
1.1.2.4 Généralisation des méthodes de projection	16
1.1.3 Méthode de Jauge	18
1.1.4 Méthode de pénalisation	19
1.1.5 Formulation formulation courant/vorticité	19
1.2 Les problèmes de localisation d'interface	21
1.2.1 Approche Lagrangienne	21
1.2.2 Approche Mixte	23
1.2.2.1 Approche directe (ou paramétrique)	23
1.2.2.2 Approche indirecte (ou implicite)	24
1.2.2.3 Méthode par éléments frontières	26
1.2.3 Approche Eulerienne	30
1.2.3.1 Avec suivi d'interface	30
1.2.3.2 Avec capture d'interface	33

2 La méthode $\phi - \psi$	35
2.1 Motivation	36
2.2 Présentation de la méthode	39
2.2.1 La fonction de courant	39
2.2.2 La pression conjuguée	40
2.3 La formulation des conditions de bord	42
3 Quelques choix d'implémentation	47
3.1 Discrétisation spatiale	48
3.1.1 La grille MAC	48
3.1.2 Domaines discrets	50
3.1.3 Convention d'indexation	51
3.2 Méthodes de validation numérique	53
3.2.1 Le test de Guermond et Shen	53
3.2.2 Normes	55
4 Problèmes de Poisson	57
4.1 Poisson-Dirichlet en présence de bords irréguliers	58
4.1.1 Discrétisation du laplacien près de bords irréguliers	60
4.1.2 Analyse d'erreur	63
4.1.3 Validation numérique	65
4.2 Traitement des conditions de bord	66
4.2.1 Extrapolation de $\Delta\psi$ sur un bord régulier	67
4.2.1.1 Développement limité du champ ψ à l'ordre 1 :	68
4.2.1.2 Développement limité du champ ψ à l'ordre 2 :	69
4.2.1.3 Extrapolation linéaire de $\Delta\psi$:	70
4.2.2 Extrapolation de $\Delta\psi$ près d'interfaces irrégulières	73
4.2.2.1 Développement limité du champ ψ :	73
4.2.2.2 Extrapolation linéaire du champ $\Delta\psi$:	74
4.3 Poisson-Neumann avec bord régulier	78
4.3.1 Validation numérique	81
4.4 Conclusions	84
5 Implémentation de la méthode ϕ-ψ	87
5.1 Construction d'un schéma temporel	88
5.1.1 Principe	88
5.1.2 Un essai insatisfaisant	89

5.1.3	Forçage de la condition de Dirichlet sur ψ	96
5.1.3.1	Extrapolation près d'un bord régulier	96
5.1.3.2	Extrapolation près d'un bord irrégulier	104
5.2	Discussion	107
5.3	Dynamique des constantes	109
5.3.1	Cas d'un canal périodique	111
5.3.2	Cas d'une particule dans un domaine carré	118
5.3.3	Cas d'une particule dans un canal périodique	122
5.4	Conclusion	127
6	Méthode hybride	131
6.1	De la difficulté à implémenter une méthode de projection	133
6.2	Le problème de Neumann	136
6.2.1	Paires orientées et segments	137
6.2.2	Discrétisation sur une grille régulière	139
6.2.2.1	Cellules régulières loin du bord	139
6.2.2.2	Cellules régulières près d'un bord	142
6.2.3	Près d'un bord irrégulier	143
6.2.4	Validations numériques du Solveur Poisson Neumann	146
6.3	Extrapolants pour le champ de vorticité	148
6.3.1	Près de bords réguliers	148
6.3.2	Près d'une interface irrégulières	151
6.3.2.1	Domaine strict en vitesse	152
6.3.2.2	Domaine étendu en vitesse	154
6.3.2.3	Validations numériques	157
6.4	Dynamique de la méthode hybride	159
6.4.1	Etude dans un domaine régulier	160
6.4.2	Etude dans un domaine borné carré avec une inclusion	163
6.4.3	Forçage de la condition de Dirichlet sur ψ	166
6.5	Conclusions	172
7	Applications	173
7.1	Théorie	174
7.2	Résultats numériques	175
7.3	Perspectives	186
	Conclusion	191

BIBLIOGRAPHIE	193
II.1 Algorithme du preconditionneur ILU(0)	xix
II.2 Algorithme de BICGSTAB préconditionné	xx

Remerciements

Durant cette initiation de trois ans au métier de chercheur, Anaël Lemaitre fût un guide exemplaire. Je lui exprime ma plus profonde reconnaissance pour avoir dirigé mes travaux avec une écoute et une pédagogie exceptionnelle. J'ai particulièrement apprécié ces moments d'intenses discussions qui nous forçaient à tout remettre en question et à repousser, chaque fois un peu plus, les limites de nos connaissances. Son empreinte dans ma formation demeurera certainement longtemps après ce doctorat. Ce fut un réel plaisir de l'avoir comme directeur de thèse et c'est une chance de l'avoir comme ami.

Frédéric Gibou et Philippe Peyla m'ont fait l'honneur d'accepter de consacrer un temps précieux à la lecture de ce manuscrit. Je tiens à les remercier vivement pour l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux et aux perspectives qu'ils pouvaient ouvrir. Je tiens également à remercier Mikhaël Balabane, Olivier Balabane, Robert Eymard et Bertrand Maury pour les discussions constructives que nous avons eues sur différents aspects de ma thèse.

Je tenais également à témoigner toute ma reconnaissance à Jean-Christophe Nave, enseignant au Massachusetts Institute of Technology, qui est à l'origine de cette aventure. Un remerciement également à l'organisme MIT-France pour avoir subventionné en 2007 mes projets de collaboration avec le professeur Rosales et Jean-Christophe Nave.

Philippe Coussot et François Chevoir m'ont accueilli au laboratoire Navier (ex-LMSGC). Je les remercie de m'avoir permis de réaliser cette thèse dans de très bonnes conditions, aussi bien humainement que professionnellement parlant.

Comment finir sans parler de tous les à-côtés de ce travail de thèse ... Mes remerciements les plus sincères s'adressent tout naturellement à toutes les personnes que

j'ai eu la chance de découvrir et côtoyer durant ce long périple, que ce soient les thésards, postdoctorants, permanents ou autres, passés ou actuels. Avec par ordre alphabétique : Abdoulaye, Alexandre, Antonin, Carmen, Delhia, Eric D., Eric L., Fabien G., Fabien M., Guillaume et Henri O., Hamid, Jean-Noël, Julie M., Kien, Laurent, Louisa, Michelle, Pascal, Pamela, Patrick, Pierre, Pierre-Emmanuel, Quentin, Sabine, Sabrina, Samir, Stephane, Teddy, Thai-Son, Viet, Wissem, Xavier Chateau, Xavier Clain, Yves. Ce manuscrit n'aurait jamais vu le jour sans leur soutien quotidien et infaillible, leurs conseils "professionnels".

Introduction générale

Au 19ème siècle, les physiciens Claude Navier et George Stokes ont écrit les équations qui permettent encore aujourd'hui d'étudier les comportements très variés et complexes d'un fluide en écoulement. Pendant longtemps l'étude de ces équations n'a pu être possible qu'à partir d'approximations plus ou moins élaborées, car dans la plupart des cas, ces équations ne possèdent pas de solutions analytiques.

A partir des années 60, l'arrivée des premiers calculateurs a donné un outil formidable pour étudier la modélisation des équations de Navier-Stokes (ENS). Les industriels ont très vite compris l'intérêt de la simulation numérique pour simuler des écoulements réels parfois très complexes. Par ailleurs, avec la montée en puissance des machines de calcul, le recours à la simulation numérique directe (SND) est devenu de plus en plus courant dans des domaines comme l'aéronautique ou la météorologie, pour étudier des écoulements fluide à grand nombre de Reynolds ou grand nombre de Mach (exemple en régime turbulent).

L'utilisation de la SND pour des écoulements lents n'a fait son apparition que depuis le début des années 90, et connaît un formidable essor grâce aux développements récents des problèmes d'interfaces (problèmes diphasique, microfluidique, ...). Ce qui permet de traiter des problèmes pluridisciplinaires à faible nombre de Reynolds faisant intervenir des écoulements en présence de parois, éventuellement mobiles ou élastiques comme par exemple dans l'étude des suspensions, des écoulements sanguins, des écoulements dans des milieux poreux,...

Aujourd'hui, les algorithmes de simulation numérique les plus populaires pour l'étude de ces problèmes d'interface sont basés sur la méthode des éléments finis [20]. Cela est dû en grande partie au cadre mathématique qu'elle fournit, qui permet d'aborder naturellement la formulation faible de problèmes d'écoulements, c'est à dire la formulation dans laquelle les preuves mathématiques sont en général les plus accessibles.

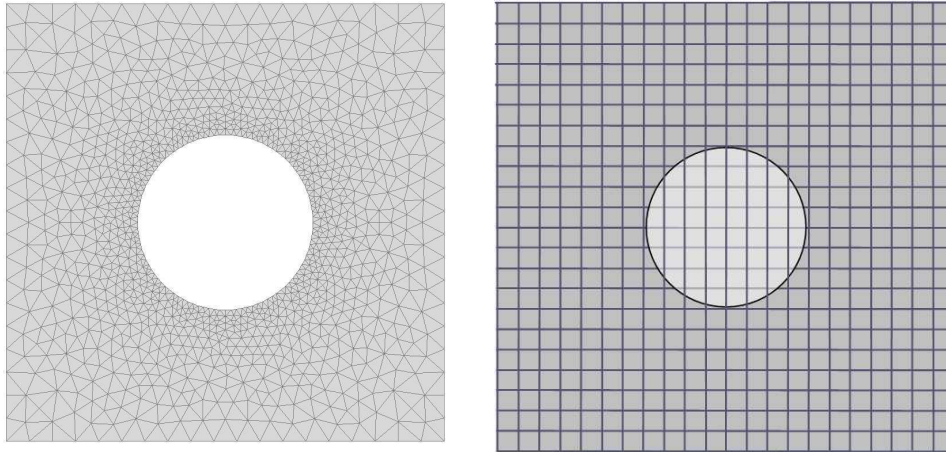


FIG. 1 – Exemple de maillage conforme (à gauche) et non conforme (à droite).

Mais son succès provient peut être surtout de la possibilité d'appuyer les éléments finis sur des maillages irréguliers. Étant donné un domaine de forme quelconque que l'on souhaiterait étudier, il est en effet toujours possible de construire un maillage “conforme”, c'est à dire dont les bords vont décrire le contour du domaine choisi, comme illustré figure 1-gauche. Si la géométrie du domaine d'écoulement change au cours du temps—c'est le cas par exemple si un objet se déplace à l'intérieur du fluide—il est encore possible de préserver la conformité du maillage en le recalculant régulièrement. Cette opération de “remaillage” est, cependant, numériquement coûteuse et on préférera souvent l'éviter.

Cela a motivé de nouvelles approches visant à développer des méthodes sur des maillages structurés cartésiens. Ces méthodes présentent l'avantage majeur de ne pas nécessiter la construction du maillage mais uniquement le repérage des cellules par des indices. Ainsi le cas de frontières mobiles ne pose aucun problème de remaillage. Des solveurs rapides et des préconditionneurs efficaces peuvent être utilisés. De plus, ces méthodes peuvent facilement être combinées à des algorithmes de raffinement local adaptatif de maillage ou des méthodes de type multi-échelles. Leur principal défaut réside dans la prise en compte précise des frontières complexes du domaine physique. Ainsi la structure cartésienne du maillage contraint ces méthodes à être utilisées sur des domaines de forme géométrique simple.

Le choix de travailler en différences finies nous garantit donc une certaine simplicité d'implémentation, mais ne laisse aucune flexibilité pour épouser les contours d'un domaine de forme quelconque. Une nouvelle méthode de simulation en diffé-

rences finies—la méthode des “ghosts fluids”—est apparue récemment pour tenter de représenter ou sont les propriétés physiques intervenant entre deux points de grilles. L’idée est de représenter des contrastes de propriétés physiques “en résolution sous-grille” : c’est à dire que l’implémentation numérique doit être construite en tenant compte de la position précise d’une interface infiniment mince “entre” les points de discrétisation.

Cette implémentation se heurte à des difficultés techniques majeures dont les effets affectent aussi bien les méthodes d’éléments finis que celles de différences finis. En effet la plupart des algorithmes de simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes incompressible s’appuient sur des méthodes à pas fractionnaire introduites par Temam et Chorin [12]. Leur intégration en temps fait intervenir deux étapes : d’abord un champ de vitesse test est calculé : il incorpore, en général, les effets des contraintes et de la convection mais n’est pas incompressible ; alors, on utilise la variable pression comme un multiplicateur de Lagrange afin de “projeter” ce champ de vitesse test sur l’espace des champs solénoïdaux. Ce faisant, on introduit dans la pression des erreurs qui sont de nature purement numérique : la pression calculée est un outil numérique —un multiplicateur de Lagrange— mais ne correspond plus la pression physique.

A ce niveau de la discussion il est intéressant de regarder d’un point de vue continu, ce qu’il se passe pour le champ de pression. Le mouvement d’un fluide est gouverné par l’équation de Navier-Stokes qui s’écrit :

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \mu \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f} \quad (1)$$

où \mathbf{u} représente le champ vitesse, p le champ de pression, ρ la densité volumique, μ la viscosité dynamique et \mathbf{f} désigne les forces volumiques extérieures. Cette équation est valable dans l’ensemble du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ occupé par le fluide et doit être complétée par une condition aux limites sur le bord $\partial\Omega$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b \quad (2)$$

Dans le cas d’un fluide compressible cette équation (1) doit être aussi complétée par l’équation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3)$$

Dans ce cas il faut également, pour fermer le problème, prescrire la relation ther-

modynamique qui relie la pression p à ρ et évidemment à d'autres paramètres tels que la température. On peut voir immédiatement que l'évolution du problème $(\mathbf{u}, \rho(M, t))$ s'écrit de façon explicite. On a donc autant d'équations d'évolution que de champs d'inconnues.

Nous nous intéressons dans ce travail au fluide incompressible. Donc dans ce cas, ρ est constant et l'équation locale de conservation de la masse (3) se simplifie sous la forme

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

La pression n'est plus connue à travers sa relation $p(\rho)$ (nous sommes dans la limite où cette relation est très raide de sorte que p évolue de façon significative, tandis que ρ peut être considéré comme étant essentiellement constant).

On peut voir p comme un multiplicateur de Lagrange associé à la propriété d'incompressibilité (4). De fait en appliquant l'opérateur divergence aux équations (1) et en utilisant la condition d'incompressibilité (4) on obtient :

$$\Delta p = -\rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (5)$$

On voit à ce stade apparaître un problème central dans la mise en oeuvre de méthodes numériques pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible. En effet l'équation de Poisson sur p (5) est une équation elliptique qui doit être définie avec une condition de bord scalaire pour posséder une unique solution. Cette condition peut être par exemple soit de type Dirichlet ou de type Neumann. Or on ne sait pas écrire proprement ces conditions. p n'ayant pas de condition de bord naturelle, les implémentations introduisent alors des conditions aux limites arbitraires pour effectuer ce calcul. Si cela permet en effet de calculer un multiplicateur de Lagrange et de forcer l'incompressibilité dans une certaine mesure, la valeur de la pression reste inévitablement entachées de cet arbitraire.

En principe la condition de bord sur p est définie par l'équation de Navier-Stokes elle-même (1), qui prescrit l'ensemble du gradient de pression ∇p au bord, et il est facile de se convaincre qu'imposer ∇p au bord –sous réserve de régularité suffisante–, c'est à la fois imposer

– une condition de type Dirichlet (à une constante près),

$$\mathbf{t} \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{t} \cdot \Delta \mathbf{u} - \mathbf{t} \cdot (\partial_{\mathbf{t}} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{f}) \text{ sur } \partial\Omega \quad (6)$$

où \mathbf{t} est un vecteur tangent au bord $\partial\Omega$

– et une condition de type Neumann,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{u} - \mathbf{n} \cdot (\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{f}) \text{ sur } \partial\Omega \quad (7)$$

où \mathbf{n} est la normale au bord $\partial\Omega$

Quand le gradient de p est défini au bord, on voit que le problème de Poisson sur p est muni d’une double condition de bord, alors qu’une seule garantit l’existence et l’unicité de la solution. Cela peut être vu comme une propriété des équations de Navier Stokes : les deux problèmes de Poisson (5) avec soit une condition de Neumann (6) soit une condition de Dirichlet (7) ont la même solution. A l’évidence il s’agit d’une propriété des champs de vitesse solution des équations de NS. On comprend, dès lors que les algorithmes garantissent mal que le champ de vitesse restent dans l’espace de ces champs compatibles, il n’est plus possible de contrôler certaines erreurs au bord. Nous reviendrons sur ces questions très en détail tout au long de ce mémoire, en construisant des algorithmes capables de traiter précisément la condition de bord pour la pression de façons consistantes.

Cette thèse comporte 7 chapitres.

Dans le premier chapitre nous passons en revue plusieurs méthodes de résolution numérique des équations de Navier-Stokes incompressible. Nous discutons également de différents problèmes de localisation d’interface. Cet état de l’art motive l’étude d’algorithmes qui soient précis dans le traitement du champ de pression près des interfaces.

Dans le second chapitre, nous présentons une reformulation des équations de Navier-Stokes faisant intervenir la fonction courant et un champ conjugué à la pression. Le fait de travailler en formulation potentielle élimine les questions liées à la propriété des champs de vitesse sur l’espace des champs solénoïdaux.

Le troisième chapitre définit nos choix d’implémentation. Nous travaillons en différence finie sur un maillage cartésien utilisant une grille MAC. Nous donnons la définition des normes d’erreurs utilisées dans le reste de la thèse.

Le quatrième chapitre est entièrement dédié à la résolution de problème de Poisson avec des conditions de type Dirichlet.

Dans le cinquième chapitre, nous proposons un algorithme permettant la résolution du problème de Stokes dans un domaine carré borné –ou périodique– et dans un domaine carré borné –ou périodique– avec une inclusion rigide.

Le sixième chapitre présente une résolution numérique du problème de Stokes en pression-vitesse-vorticité qui s'appuie sur l'implémentation de solveur précis pour le problème de Poisson Neumann utilisé pour la pression.

Dans le dernier chapitre, nous allons valider notre algorithme sur un problème d'un écoulement fluide autour d'une particule entre deux parois en régime de Stokes et nous donnerons un exemple d'application dans le domaine des milieux poreux.

Chapitre 1

Etat de l'Art : Les méthodes de résolution des écoulements incompressibles et les problèmes de localisation d'interface

Sommaire

1.1	Méthodes de résolution des écoulements incompressibles	8
1.1.1	Méthode de Projection de type Chorin-Temam	9
1.1.2	Méthode de Projection d'ordre supérieur	12
1.1.3	Méthode de Jauge	18
1.1.4	Méthode de pénalisation	19
1.1.5	Formulation formulation courant/vorticité	19
1.2	Les problèmes de localisation d'interface	21
1.2.1	Approche Lagrangienne	21
1.2.2	Approche Mixte	23
1.2.3	Approche Eulerienne	30

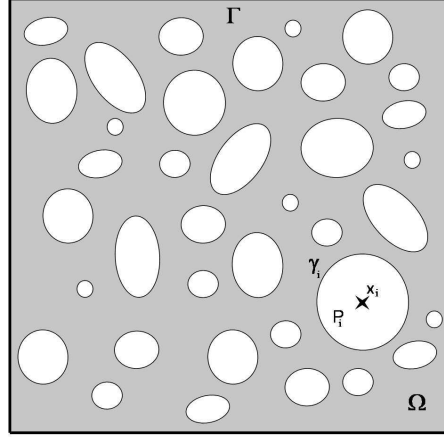


FIG. 1.1 – Exemple de représentation de suspension

On considère le domaine fluide borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, représentant la phase interstitielle et on note P l'ensemble des N particules rigides $(P_i)_{1 \leq i \leq N}$ de bords respectifs $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq N}$ immergés dans cette phase fluide. La matrice "fluide+particules" que compose cette suspension (si les particules sont mobiles) ou ce milieu poreux (si les particules sont fixes) possède un bord Γ régulier. Le fluide vérifie à chaque instant les équations de Navier-Stokes incompressibles avec des conditions de Dirichlet au bord :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho (\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_b \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où \mathbf{u} représente le champs de vitesse, p le champs de pression et \mathbf{f} représente les forces extérieures exercées sur le fluide. La viscosité du fluide impose une condition de non glissement sur le bord $\partial\Omega = \Gamma \cup \gamma$ où $\gamma = \cup_{i=1}^N \gamma_i$.

L'objectif de ce chapitre est de faire un tour d'horizon des méthodes numériques mise en oeuvre pour résoudre ces deux problèmes.

1.1 Méthodes de résolution des écoulements incompressibles

A la fin des années 60, une série d'articles rédigés par Chorin et Temam introduisaient la méthode de projection comme étant une méthode efficace pour le calcul des solutions des équations de Navier Stokes incompressible. Cette méthode permet de découpler le champs de vitesse et la pression du fluide et va devenir très vite

populaire dans les applications d'écoulement visqueux et incompressible à nombre de Reynolds modéré. Lorsque les conditions de bords sont périodiques, les résultats de cette méthode sont performants et très bien compris, mais en présence de parois physiques avec par exemple des conditions de non-glissement, les choses deviennent plus délicates. En effet il y a encore des controverses concernant le choix optimal des conditions aux bords à imposer selon l'étape de projection ; de plus et malgré l'évidence de la présence d'une couche limite numérique à proximité de ces parois, leurs structures sont encore très peu connues [16] : cette discussion fera l'objet de notre première section.

Par la suite, nous verrons que depuis ces 25 dernières années, plusieurs schémas ont été proposés dans le but d'améliorer ces méthodes. Nous présenterons les schémas les plus largement utilisés.

1.1.1 Méthode de Projection de type Chorin-Temam

Ce sont des méthodes de marche en temps à pas fractionnaires visant à découpler la vitesse et la pression. Plutôt que de calculer simultanément l'équation de quantité de mouvement et la condition d'incompressibilité, ces méthodes procèdent dans une première étape par le calcul d'un champ de vitesse intermédiaire \mathbf{u}^* en utilisant de l'équation de quantité de mouvement. Ce champ ne vérifie pas la condition d'incompressibilité, et il est donc nécessaire de le projeter dans un espace où les champs de vecteur sont de divergence nulles pour obtenir \mathbf{u}^{n+1} .

Le schéma le plus simple qui est le schéma explicite d'ordre 1 en temps se présente sous sa forme semi-discrete :

Etape 1 :

$$\rho \left(\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \right) - \mu \Delta \mathbf{u}^n = \mathbf{f} \quad (1.2)$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Un schéma implicite d'ordre 1 en temps peut aussi être écrit sous la forme :

Etape 1 :

$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \rho (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \mu \Delta \mathbf{u}^* = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{b} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Une différence fondamentale entre (1.2)-(1.3) et (1.4)-(1.5) est la condition aux limites qui est utilisée sur \mathbf{u}^* pour résoudre (1.4).

Dans ces schémas, on calcule la pression en résolvant une équation de Poisson qui garantit l'incompressibilité de \mathbf{u}^{n+1} . Ce terme de pression intervient dans l'équation de quantité de mouvement comme un multiplicateur de Lagrange assurant que la vitesse vérifie la contrainte de continuité. Ces problèmes dérivent des équations (1.3) ou (1.5) dont on prend la divergence pour obtenir :

$$\Delta p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (1.6)$$

L'équation (1.6) est analogue à l'équation (5). La résolution numérique de ce problème de Poisson passe par l'introduction de conditions aux limites, qui comportent un certain degré d'arbitraire ; comme discuter dans l'introduction (voir les conditions aux limites (6) et (7)) et pour simplifier l'écriture du problème, nous choisissons des conditions aux limites en vitesse du type $\mathbf{u} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \mu \mathbf{t} \cdot \Delta \mathbf{u} \text{ et } \frac{\partial p}{\partial n} = \mu \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{u} \text{ sur } \partial \Omega \quad (1.7)$$

On voit que dans le schéma implicite en temps (1.4)-(1.5), du fait de la condition $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{0}$ sur $\partial \Omega$, on ne peut plus respecter la conditions de Neumann aux limites du domaine (1.7)-droite. En effet si on projette la première équation de (1.5) sur le vecteur normal unitaire \mathbf{n} , on trouve :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} (\mathbf{n} \cdot \nabla p^{n+1}) \quad (1.8)$$

En imposant la condition de non-glissement $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^* = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ sur $\partial \Omega$, on obtient :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \text{ ou } \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial \Omega \quad (1.9)$$

A cause de cette inconsistence due aux conditions aux limites, des erreurs significatives sont introduites soit sur le calcul de la pression, soit sur celui de la vitesse. Ces erreurs sont localisées aux bords du domaine dans une couche limite [14,16,18,27]. La compréhension de cette localisation de l'erreur au niveau de la couche limite passe

par l'étude de ses modes propres [18]. En effet en combinant les équations (1.4), (1.5) et (1.9)– et en omettant le terme convectif pour simplifier la compréhension du phénomène–, il vient

$$\begin{cases} (I - \Delta t \Delta) \Delta p^{n+1} = 0 \\ \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.10)$$

Or si on écrit le problème de Stokes linéarisé - équation de Orr-Sommerfeld -, nous avons :

$$\Delta p^{n+1} = 0 \quad (1.11)$$

Cela montre que nous avons un problème singulier, et E et Liu [16, 18] démontrent que dans ce cas la couche limite est d'ordre $O(\Delta t^{1/2})$ dans l'approximation de la pression.

Malgré ces inconsistances numériques, Patankar et al. ont proposée récemment [52] dans l'esprit ces méthodes de projection, une méthode qui décompose un pas de temps en une étape de prédiction, sans prise en compte de la contrainte, puis à construire le champ à l'étape suivante par projection restreinte aux particules sur l'espace des mouvements rigides. Le champs construit sont discontinues aux interfaces, mais on peut montrer une convergence pour la norme L^2 en espace. Des tests numériques pour la simulation de particules en sédimentation se compare très favorablement aux expériences.

Jusqu'à aujourd'hui, l'amélioration des schémas proposés par Chorin et Temam demeure un enjeu essentiel dans la résolution des équations de Navier Stokes. Beaucoup de travaux sur les méthodes à pas fractionnaire proposent des solutions aux problèmes cités précédemment selon différents principes :

- soit en fixant de façon exacte les conditions aux limites soit en vitesse. Le schéma le plus connu étant celui de Kim et Moin [43, 50],
- soit en pression (voir les travaux d'Israeli et al. [36, 40]),
- soit en proposant des schémas corrigés. La version la plus précise connue actuellement est la méthode de correction de pression proposé par Van Kan [26, 39].

A partir de considérations heuristiques certains auteurs (e.g., [48]) ont également proposé de modifier l'algorithme de Van Kan en ajoutant un nouveau terme à la correction de pression. Ce sont essentiellement les schémas développés par Guermond et al. qui sont de type

- correction en pression [29]
- et correction en vitesse qui présente un bien meilleur cadre mathématique [30],

Nous allons également ouvrir un volet sur d'autres méthodes :

- certaines dérivent des méthodes projections, mais se différencient par une réécriture de la formulation des équations de Navier-Stokes (formulation de jauge [19], formulation vortacité/fonction de courant [10], Yosida [54],...)
- tandis que d'autres proposent des stratégies différentes, par exemple les approches par pénalisation [37, 56]

1.1.2 Méthode de Projection d'ordre supérieur

1.1.2.1 Avec une condition exacte en vitesse

Kim et Moin ont proposé dans [49] et [50] un schéma amélioré basée sur le schéma d'ordre 1 implicite présenté en préambule de cette section, mais qui modifie la condition aux limites pour le champs de vitesse intermédiaire \mathbf{u}^* dans l'étape (1.4) en faisant intervenir un gradient de pression. Pour le moment on va écrire cette pression ϕ .

Etape 1 :

$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \rho(\mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} = \mu \Delta \frac{\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n}{2} \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{b} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \phi^n \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.12)$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \phi^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.13)$$

Ce schéma a suscité beaucoup d'intérêt et connu plusieurs améliorations dans le but de corriger l'ordre de convergence sur la pression [8, 43, 63]. On voit que la condition $\mathbf{u}^* = \mathbf{b}$ imposée dans le schéma implicite de Temam-Chorin (1.4) est remplacée par $\mathbf{u}^* = \mathbf{b} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \phi^n$.

Ainsi pour obtenir ϕ^{n+1} , il faut résoudre le problème de Poisson associée que l'on obtient en prenant la divergence de la première équation (1.13) :

$$\Delta \phi^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (1.14)$$

La condition aux limites pour ϕ^{n+1} nous est donné par la projection sur la compo-

sante normale de la premiere équation du système (1.13)

$$\frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial n} = \frac{\rho}{\Delta t}(\mathbf{u}^* - \mathbf{b}) \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.15)$$

Ce schéma permet d'obtenir un ordre $O(\Delta t^2)$ pour le champ de vitesse. Si on cherche p par identification avec ϕ (e.g. $p^n \equiv \phi^n$), on arrive à une inconsistance [8, 63]. En effet sous reserve que la condition de compatibilité

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} ds = 0 \quad (1.16)$$

soit respectée, on voit que si on projette sur la composante normale la seconde équation du système (1.12) nous avons :

$$\frac{\partial p^n}{\partial n} = \frac{\rho}{\Delta t}(\mathbf{u}^* - \mathbf{b}) \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.17)$$

On obtient alors une condition aux limites numériques

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = \frac{\partial p^n}{\partial n} \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.18)$$

Or cette condition n'est pas physique et on voit que $\frac{\partial p^n}{\partial n}$ d'ordre $O(1)$ sur les bords du domaine. Cela provient de la présence d'un couche limite numérique qui propage de l'erreur sur le champ de pression p^n [8, 16, 18, 63].

Il est possible d'avoir une erreur sur la pression d'ordre $O(\Delta t^2)$ [8], en apportant à ce schéma une troisième étape qui consiste à mettre à jour la pression à chaque pas de temps. En éliminant \mathbf{u}^* dans les équations (1.12) et (1.13) on montre que p peut être obtenu grâce à la relation :

$$p^{n+1/2} = \phi^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\rho} \Delta \phi^{n+1} \quad (1.19)$$

1.1.2.2 Avec une condition exacte en pression

Israeli et al. [35, 36, 40] ont proposé des schémas de projection basé sur la condition exacte en pression, une version simplifié peut s'écrire sous la forme :

Etape 1 :

$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \rho(\mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} = \mu \Delta \frac{\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n}{2} \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{b} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.20)$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1/2} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0 \\ \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial n} &= -\mu \mathbf{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^*)] \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.21)$$

La condition de non-glissement sur \mathbf{u}^{n+1} intervient à travers la condition de Neumann inhomogène en pression. Ce schéma se base sur les conditions aux limites de pression exactes et n'utilise que la condition de Neumann

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.22)$$

Puisque $\nabla \cdot \mathbf{u}^n = 0$ (respectivement $\nabla \cdot \mathbf{u}^* \approx 0$) nous retrouvons à la fois :

$$\frac{\partial p^{n+\frac{1}{2}}}{\partial n} = -\mu \mathbf{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^n)] \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.23)$$

et

$$\frac{\partial p^{n+\frac{1}{2}}}{\partial n} = -\mu \mathbf{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^*)] \text{ sur } \partial\Omega \quad (1.24)$$

Ainsi le problème de Poisson-pression associé que l'on cherche à résoudre s'écrit sous une forme :

$$\begin{cases} \Delta p^{n+1/2} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \\ \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial n} = -\mu \mathbf{n} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^*)] \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.25)$$

Cette écriture est consistante avec la relation de compatibilité

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial \mathbf{n}} = \int_{\partial\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (1.26)$$

Ce schéma donne des résultats d'ordre $O(\Delta t^2)$ en vitesse et $O(\Delta t^{3/2})$ en pression.

1.1.2.3 Schéma basé sur une formulation de pression graduée

Les premiers schémas de type correction-pression ont été introduit par Van Kan [39]. Un schéma numérique est proposé sous la forme :

Etape 1 :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n-1/2} = \Delta \frac{\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n}{2} \\ \mathbf{u}^* = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.27)$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t (\nabla p^{n+1/2} - \nabla p^{n-1/2}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.28)$$

Des preuves de convergence en $O(\Delta t^2)$ sur la vitesse en norme L^2 ont été données dans [28] et [61]. Toutefois, cet algorithme est souvent critiqué car il impose une condition aux limites artificielle sur la pression qui limite sa convergence en norme L^2 à l'ordre $O(\Delta t)$ et se manifeste en pratique par une couche limite numérique.

Pour éliminer ce problème, Guermond et al. utilisent dans [29, 30] une forme rotationnelle du problème fait apparaître le terme diffusif dans la seconde étape de la projection pour ne plus avoir de problème avec les conditions aux limites en pression :

Etape 1 :

$$\begin{cases} \frac{3\mathbf{u}^* - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n-1/2} = \Delta \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}^* = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.29)$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \frac{2}{3}\Delta t ((\nabla p^{n+1/2} - \nabla p^{n-1/2}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^*)) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.30)$$

Si on somme la première équation de (1.29) et celle de (1.30), et si on considère que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}^* \approx \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}^n$, on obtient alors la forme rotationnelle

$$\begin{cases} \frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{2\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n-1/2} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.31)$$

Cette nouvelle variante de l'algorithme de correction de pression est effectivement plus précise que la version standard car elle fournit une estimation en $O(\Delta t^{3/2})$ sur la vitesse en norme H^1 et la pression en norme L^2 [28].

Guermond et al. vont aussi s'inspirer de [36, 40] pour donner une version de ces schémas en vitesse-correction. L'idée de ce schéma consiste à prendre une stratégie duale de la méthode de correction de pression :

Etape 1 :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t(\nabla p^{n+1/2} - \nabla p^{n-1/2}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.32)$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla p^{n-1/2} = \Delta \frac{\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n}{2} \\ \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.33)$$

Guermond et Shen ont montré dans [30] que cette méthode peut se ramener à une méthode de pas fractionnaire introduite par Israeli et al. que nous avons présenté dans la section (1.1.2.2) sous une forme rotationnelle. L'étude de convergence montre que ce schéma est d'ordre $O(\Delta t^2)$ en vitesse et $O(\Delta t^{3/2})$ en pression.

1.1.2.4 Généralisation des méthodes de projection

Beaucoup de schémas permettent d'obtenir une convergence d'ordre $O(\Delta t^2)$ pour la vitesse mais pas pour la pression. Brown et al. proposent une forme générale pour les algorithmes de projection du second ordre en 3 étapes :

Etape 1 : Résolution du champs de vitesse intermédiaire \mathbf{u}^*

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} + \nabla q = \Delta \frac{\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^n}{2} \\ B(\mathbf{u}^*) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.34)$$

où q représente une approximation de $p^{n+1/2}$, et $B(\mathbf{u}^*)$ est une condition aux limites pour \mathbf{u}^* qui doit être définie dans le cadre de la méthode proposée.

Etape 2 : Execution de la projection

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \nabla \phi^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

ici on utilise des conditions aux limites consistante avec $B(\mathbf{u}^*) = 0$.

Etape 3 : Update de la pression

$$p^{n+1/2} = q + L(\phi^{n+1}) \quad (1.36)$$

où la fonction L représente la dépendance de $p^{n+1/2}$ sur ϕ^{n+1} .

Dans [8], Brown et al. expliquent que pour avoir un schéma de correction-pression d'ordre 2 en temps à la fois pour la vitesse et pour la pression, il faut faire le bon choix du triplet $(q, B(\mathbf{u}^*), L(\phi^{n+1}))$.

Par ailleurs, de manière à obtenir un champ de pression non pollué par des modes parasites, O. Botella [6] propose des schémas de projection d'ordre 2 et 3 en temps en écrivant un schéma de projection sous la forme :

Etape de prédiction :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1 \mathbf{u}^* + b_1 \mathbf{u}^n + b_2 \mathbf{u}^{n-1} + b_3 \mathbf{u}^{n-2}}{\Delta t} - \Delta \mathbf{u}^* + \nabla(c_1 p^n + c_2 p^{n-1}) \\ \quad + d_1(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + d_2(\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n-1} + d_3(\mathbf{u}^{n-2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n-2} = \mathbf{f}^{n+1} \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.37)$$

Etape de projection :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1 \mathbf{u}^{n+1} - a_1 \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \nabla(p^{n+1} - c_1 p^n - c_2 p^{n-1}) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.38)$$

où les valeurs réelles $a_1, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3$ sont définies de manière à ce que l'erreur de troncature globale du schéma soit de l'ordre en temps désiré.

Remarque : En utilisant une discrétisation spatiale de type collocation Tchebychev avec une grille unique, où la pression est approximée par des polynômes de degré moins élevé de deux unités que ceux approchant la vitesse, Botella résoud le problème de Navier-Stokes par la résolution successive d'équations de Helmholtz pour la vitesse et d'équations de type pseudo-Poisson, sans condition de Neumann, pour la pression. Ainsi La précision spatiale des schémas construits est de type spectral, et la précision temporelle est d'ordre deux ou trois, pour la vitesse ainsi que la pression.

1.1.3 Méthode de Jauge

Pour mieux comprendre comment les conditions aux limites des méthodes de projections doivent être choisies, il est intéressant de considérer une formulation alternative des équations de Navier Stokes incompressible proposée par E et Liu [19]. On considère deux nouvelles variables \mathbf{m} et χ qui sont reliés à la vitesse du fluide par la relation suivante :

$$\mathbf{m} = \mathbf{u} + \nabla \chi \quad (1.39)$$

Le champs \mathbf{m} et le potentiel χ sont choisis de manière à satisfaire les équations de Navier Stokes :

$$\mathbf{m}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \Delta \mathbf{m} \quad (1.40)$$

La pression étant donnée par :

$$p = \chi_t - \Delta \chi \quad (1.41)$$

et la condition aux limites par :

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b \quad (1.42)$$

Cette formulation est équivalente à la formulation des équations de Navier Stokes (1.1). Si on discrétise le problème (1.39)-(1.40)

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{m}^{n+1} - \mathbf{m}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1/2} = \Delta \frac{\mathbf{m}^{n+1} + \mathbf{m}^n}{2} \\ \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{m}^{n+1} - \nabla \chi^{n+1} \end{cases} \quad (1.43)$$

Comme que les conditions aux limites soient données pour les valeurs du champs de vitesse \mathbf{u} , (1.39) implique qu'il y a un couplage des conditions aux limites pour les champs \mathbf{m} et $\nabla \chi$

Ce schéma est d'ordre 2 en temps bien que la présence de la pression ne soit pas nécessaire pour pouvoir faire évoluer le champ de vitesse. On obtient une représentation de la pression à chaque pas de temps, grâce à la relation

$$p^{n+1/2} = \frac{\chi^{n+1} - \chi^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \Delta (\chi^{n+1} + \chi^n) \quad (1.44)$$

Cette méthode est assez similaire à celle de Kim et Moin.

E et Liu [19] utilisent cette méthode dans laquelle les conditions au bord pour \mathbf{m}^{n+1} sont données avec le terme χ^{n+1} approximé par $2\chi^n - \chi^{n-1}$. Cette idée d'extrapoler les valeurs aux limites a déjà été utilisé antérieurement par [40] ; le but de Karniadakis étant d'approcher les conditions aux limites en pression dans le cas d'une méthode

de Poisson-pressure. E et Liu expliquent que les méthodes de projection introduisent des modes numériques additionnelles dans le problème lorsque l'on essaie de monter en ordre, et d'ailleurs ils prouvent dans [16] que les méthodes de projection sont des méthodes de perturbation singulière des équations aux dérivées partielles. Comme nous avons pu le voir, très souvent les "faux" modes numériques se caractérisent par des couches limites numériques [6, 14, 16, 18].

1.1.4 Méthode de pénalisation

L'approche de pénalisation consiste à relaxer la contrainte en introduisant un terme à la fonctionnelle à minimiser, terme qui pénalise la non appartenance à l'espace admissible. Elle a été utilisée par de nombreux auteurs (voir cours B. Maury), initialement pour prendre en compte la condition de Dirichlet au bord du domaine, puis pour gérer la présence d'un obstacle au sein d'un écoulement ou d'un matériau, et étendue plus récemment à la gestion de la contrainte de mouvement rigide pour une particule dans un fluide – voir [56, 58, 66] pour une approche de type différences finies, et [37, 42] pour une application dans un contexte d'éléments finis. Appliqué aux équations de Navier-stokes cela revient à ajouter un terme du type $\frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ce qui donne :

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1.45)$$

sous la contrainte d'incompressibilité $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

1.1.5 Formulation formulation courant/vorticité

De nombreuses méthodes reformulent les équations de Navier Stokes en s'appuyant sur des propriétés physiques du fluide en écoulement (incompressible, irrotationnel,...). Par exemple en utilisant le caractère rotationnel du fluide on peut écrire le champ de vorticité sous la forme

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (1.46)$$

et en appliquant l'opérateur rotationnel aux équations (1), on obtient alors une formulation vorticité du problème sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega \right) = \mu \Delta \omega + \mathbf{f} \quad (1.47)$$

On remarque que cette formulation fait disparaître le champ de pression dans la résolution des équations de Navier-Stokes.

Dans le cas d'un fluide incompressible nous savons qu'il est possible de définir un fonction de courant ψ associée au champ de vitesse telle que

$$\mathbf{u} = \nabla^\perp \psi = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \quad (1.48)$$

Si on injecte cette relation dans l'équation (1.46) on obtient la relation

$$\Delta \psi = \omega \quad (1.49)$$

A partir de ces considérations physiques et de la nature du problèmes à traiter il existe plusieurs stratégies pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressible. Citons par exemple les travaux de Donna Calhoun [10], qui utilise une méthode de projection sur une formulation mixte vorticité-fonction de courant :

Etape 1 :

$$\frac{\omega^* - \omega^n}{\Delta t} = -(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \omega^n \quad (1.50)$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} \rho \frac{\omega^{n+1} - \omega^*}{\Delta t} = -\mu \Delta \omega^{n+1} \\ \Delta \psi^{n+1} = \omega^{n+1} \\ \int_{\partial \Omega} \omega^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (1.51)$$

Ou encore les travaux de Ben Artzi et al. [2, 3] qui consistent à récrire les équations (1.1) en deux dimension sous la forme

$$\rho \left(\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \nabla^\perp \psi \cdot \nabla \Delta \psi \right) - \mu \Delta^2 \psi = \mathbf{f} \quad (1.52)$$

où $(u, v) = \nabla^\perp \psi$. Le prix à payer pour cette méthode est le traitement de l'opérateur du bilaplacien Δ^2 qui va falloir inverser à chaque pas de temps. Cette méthode donne néanmoins de bon résultat de convergence en espace.

1.2 Les problèmes de localisation d'interface

Les approches que nous avons présentées précédemment peuvent en théorie faire l'objet d'une discrétisation spatiale basée sur un maillage conforme ou non conforme – c'est à dire qui respecte ou non la géométrie de l'interface.

Des méthodes basées sur une discrétisation conforme du maillage comprennent les approches dites "Lagrangiennes", dans lesquelles les champs physiques sont connus sur les interfaces et le maillage dans son ensemble épouse leur forme.

A l'opposé, il existe un ensemble de méthodes basées sur un maillage fixe et indépendant de la forme des interfaces - il s'agit souvent de maillage non-conforme cartésien. Ces approches "eulériennes" posent alors des problèmes évidents de localisation d'interface. On identifie deux familles de méthode de localisation d'interface : (a) soit par un algorithme de "front tracking" (b) soit par un algorithme de "front capturing". Les méthodes de front-tracking présentent l'avantage de fournir une description explicite de la position de l'interface. Tandis que les méthodes de front-capturing reconstruisent l'interface grâce aux propriétés de certains champs de variables comme la densité ou la fraction fluide.

Entre ces deux ensembles de méthodes Lagrangiennes et Eulériennes, il existe de nombreuses approches que l'on qualifie de mixtes, car elles peuvent mélanger à la fois un maillage fixe dans l'ensemble du domaine mais conforme près des interfaces. Dans ce chapitre, nous allons faire une présentation non exhaustive de certaines méthodes dédiées à la présence d'une interface.

1.2.1 Approche Lagrangienne

Les méthodes lagrangiennes ont certains avantages : (i) elles permettent de définir et de suivre de façon très précise toutes interfaces matérielles, (ii) d'appliquer facilement les conditions aux limites et par ailleurs (iii) le terme convectif non linéaire de l'équation de quantité de mouvement est absent. Il existe deux grandes classes de méthode Lagrangienne, suivant la présence ou non d'un maillage.

Dans le cas des méthodes lagrangiennes avec présence d'un maillage la complexité relative des géométries des interfaces (voir figure (1.2) à gauche) implique l'utilisation d'un maillage non-régulier ce qui impose donc la combinaison exclusive d'algorithmes de suivi d'interface (tracking-front) dans la mesure où le maillage évolue pour s'adapter aux mouvements – dans ce cas on parle de maillage adaptatif. Les difficultés majeures liées à ces méthodes purement lagrangiennes sont les problèmes de précisions numériques liés aux maillages fortement irréguliers, ce qui est souvent

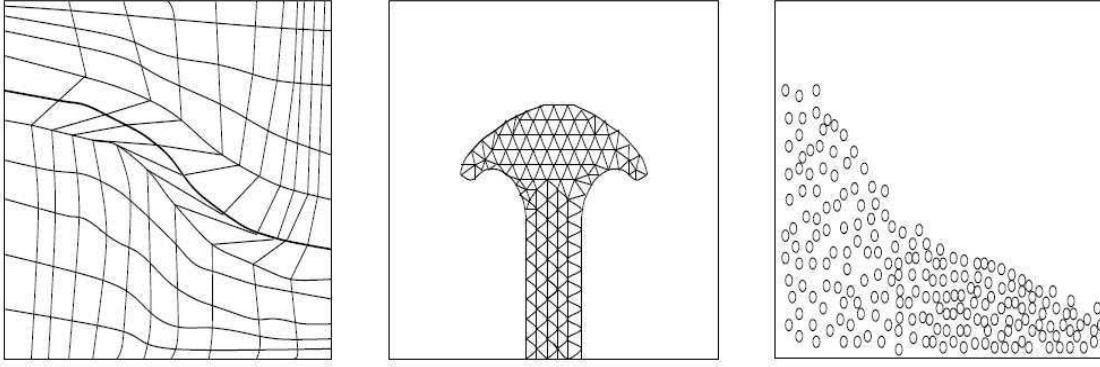


FIG. 1.2 – (gauche) approche strictement lagrangienne avec suivi d'interface; (centre) Free-lagrangian avec suivi d'interface; (droite) méthode particulière sans maillage

le cas lorsque l'interface subit de grandes déformations, sans parler du coût important qu'il y a à devoir remailler à chaque pas de temps. Pour pallier aux problèmes de grandes déformations et éviter une trop grandes distortions des mailles à l'interface des méthodes spécifiques ont vu le jour.

Les premières sont les méthodes dites "**Free Lagrangian**", qui s'appuient sur une nouvelle grille qui permet de transférer les informations d'un pas de temps au suivant afin de pouvoir interpoler les dérivées temporelles. En effet le problème des maillages dits adaptatifs qui évolue au cours du temps, c'est qu'à chaque remaillage il faut pouvoir transférer les informations du point d'espace et du temps précédents au maillage suivant. L'avantage de cette méthode est qu'elle est précise, son inconvénient c'est qu'elle doit utiliser des algorithmes de remaillage et de rezoning qui coûtent beaucoup en temps de calcul et en place mémoire.

Les **méthodes particulières sans maillage** sont également une réponse aux phénomènes de grandes déformations. Les méthodes de type SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) sont des méthodes sans maillage dans lesquelles des particules sont utilisés pour stocker des quantités physiques telles que la masse, la densité, etc. Elle utilise un formalisme emprunté au domaine du traitement du signal et passe par une définition en produit de convolution :

$$u(x) = \int_{\Omega} u(t) * w(x - t) dt$$

où w est une fonction dirac définie comme fonction poids à support compact sur Ω . sous forme discrète, le problème s'écrit :

$$u^h(x) = \sum_i \phi_i(x) u_i$$

où $\phi_i = w(x - x_i) \Delta V_i$ sont des fonctions poids qui définissent un espace fonctionnel. Cette méthode à deux avantages majeurs : elle garantit la conservation de la masse sans calcul supplémentaire et le calcul de pression ne passe plus par la résolution d'un système linéaire mais par la contribution qu'apporte chaque particule voisine par son propre poids. Cette méthode présente également des inconvénients, en ce qui concerne tout d'abord l'implémentation des conditions de bord, en effet il s'agit d'une méthode non interpolante et de consistance d'ordre nulle, c'est à dire qu'on ne peut pas reproduire de fonction linéaire. De plus il faut régler "à la main" la taille des supports des fonctions de distribution qui sont des fonctions dirac et on ne sait pas faire de d'intégration numérique. Des méthodes sont venues améliorer ces faiblesses, avec un certain succès (ex : méthodes "free Galerkin", méthode RKPM, etc) mais durant ces dix dernières années des améliorations considérables ont été développées tout spécialement avec les méthodes aux éléments naturels (NEM).

1.2.2 Approche Mixte

Une approche mixte est largement utilisée dans les applications fluide-structure. On étudie le fluide avec des coordonnées euleriennes et la structure avec des coordonnées lagrangiennes. Ceci permet de discrétiser les équations soit par differences finies soit par éléments finis. Il existe deux façons de traiter ce problème soit (1) par une approche dite directe (ou paramétrique) qui conduit à l'utilisation d'un maillage conforme, par exemple dans le cadre d'une stratégie Arbitraire Lagrange Euler (ALE) soit (2) par une approche indirecte (ou implicite) qui intègre complètement le traitement fluide/interface.

1.2.2.1 Approche directe (ou paramétrique)

Le terme "paramétrique" signifie que l'on se propose de travailler dans l'espace des degrés de liberté réels. La rigidité des particules n'est pas vue comme une contrainte mais est intégrée de façon essentielle à l'espace sur lequel on pose le problème. Cette approche se prête naturellement à une formulation variationnelle. La discrétisation en espace de cette formulation amène à chercher une base d'éléments finies [46].

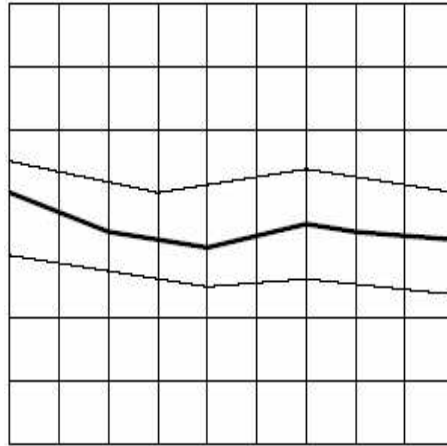


FIG. 1.3 – Méthode Arbitrary-Lagrangian-Eulerian

Nous donnons l'exemple des méthodes ALE (Arbitrary-Lagrangian-Eulerian).

Cette approche a été introduite par Hirst et *al.* en 1974. Elle comporte trois étapes : (i) un calcul Lagrangien sans l'interface (ii) une itération en temps des champs de pression et de vitesse suivi du déplacement de l'interface à sa nouvelle position lagrangienne (voir figure 1.3) et (iii) une phase de rearrangement du maillage qu'on appelle "rezoning". Comme on peut le voir cette méthode est très similaire à l'approche Lagrangienne. L'idée principale de la méthode ALE est de travailler à partir du maillage d'un domaine fluide initial, et de pouvoir le déformer au cours du temps, l'avantage de cette approche est d'éviter toute forme d'interpolation temporelle pour le calcul des dérivées temporelles (étape de projection). Bien sûr les inconvénients restent les mêmes que dans une approche purement lagrangienne, car même si ces méthodes permettent de limiter le nombre de remaillage, elles ne les évitent pas totalement.

1.2.2.2 Approche indirecte (ou implicite)

Dans cette approche le mouvement rigide des particules est traité comme une contrainte sur l'espace des champs de vitesse définis sur tout le domaine. Cela permet l'utilisation d'un maillage qui recouvre l'ensemble du domaine (on parle dans ce cas de domaine fictif).

Les méthodes de domaine fictif consistent à étendre un problème défini sur un domaine mobile et complexe (le domaine fluide) à un domaine (fictif) plus grand mais

fixe. L'avantage de ces méthodes est de chercher les champs \mathbf{u} et p sur un maillage indépendant du temps, et d'éviter ainsi les étapes de remaillage et de projection. De plus, si le domaine fixe est suffisamment simple, il est possible d'utiliser des maillages cartésiens, ce qui permet l'utilisation de solveurs rapides. Nous donnons par la suite quelques exemples de méthodes inspirées des domaines fictifs.

Méthode de domaine fictif algébrique

L'idée de cette méthode, introduite par V.K. Saul'ev dans [60], est de modifier localement le maillage pour que celui-ci soit localement conforme (figure 1.4). Ainsi sur tout le domaine on a un vrai maillage cartésien mais près des zones complexes le maillage est non structuré ce qui permet de garder un préconditionnement pour le calcul.

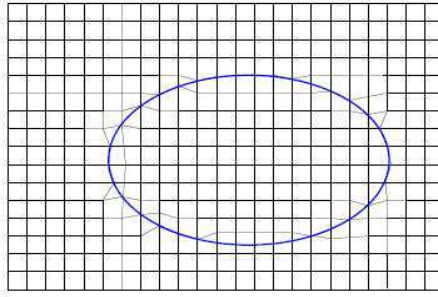


FIG. 1.4 – Maillage cartésien localement adapté

Méthodes de domaine fictif avec multiplicateurs de Lagrange

La plus connue des approches de type domaine fictif est l'approche avec multiplicateur de Lagrange introduite par R. Glowinski et al. [24, 25]. Afin de conserver un maillage cartésien du domaine fictif et de prendre en compte de façon adaptée les conditions aux limites, un deuxième maillage est considéré. Ce deuxième maillage, sur lequel les multiplicateurs de Lagrange sont définis, est adapté à la géométrie du domaine physique. On parle

- soit de multiplicateurs de Lagrange de surface lorsque les multiplicateurs sont définis sur un maillage surfacique sur la frontière immergée (figure 1.5-gauche) ;
- soit de multiplicateurs de Lagrange distribués lorsque les multiplicateurs sont définis sur le domaine fictif extérieur au domaine d'étude (figure 1.5-droite).

Après discrétisation (par éléments finis en général), l'approche avec multiplicateurs de Lagrange fait apparaître des problèmes linéaires de type point-selle, où les condi-

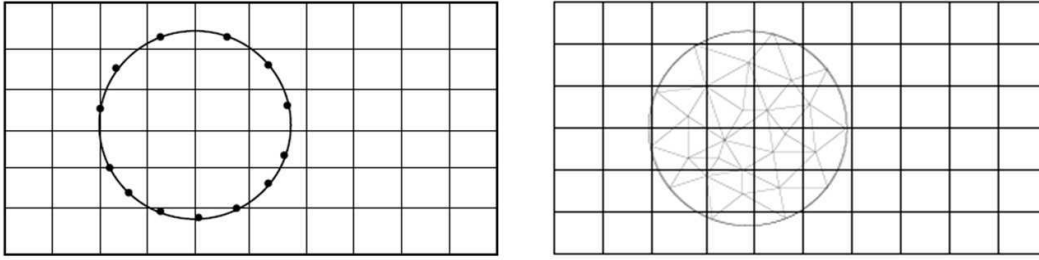


FIG. 1.5 – Méthode des domaines fictifs : (gauche) exemple de maillage avec multiplicateurs de Lagrange de surface (à droite) avec multiplicateurs de lagrange distribués

tions aux limites sont imposées sous forme faible à l'aide d'une contrainte.

L'intérêt de l'approche avec multiplicateurs de Lagrange est de pouvoir conserver les propriétés d'un maillage cartésien du domaine fictif et d'avoir un maillage auxiliaire qui permet d'imposer de façon précise les conditions aux limites immergées. Cependant cette approche conduit à résoudre un système avec des inconnues supplémentaires (qui sont les multiplicateurs) et la construction du maillage auxiliaire (surtout en cas de déformation de la frontière) peut s'avérer aussi coûteuse que celle d'un maillage adapté au domaine physique (voir détails dans [55]).

Méthode de la frontière élargie

Cette méthode a été introduite par Bertrand Maury [47] dans le but de résoudre le problème de Poisson de type dirichlet dans un domaine perforé. L'idée de base est proche de celle des domaines fictifs. En effet, on remplace le problème initialement posé dans un domaine perforé par un problème équivalent posé dans un domaine de forme plus simple. Dans celui ci, on considère un maillage cartésien permettant d'utiliser des solveurs rapides et des préconditionneurs efficaces. L'originalité est l'utilisation d'un maillage cartésien tout en gardant la possibilité d'approcher la solution avec précision dans un voisinage du trou, et ce, en utilisant un problème local, auxiliaire, basé sur un maillage fin. Cette approche nécessite donc d'une formulation multi-domaine (pour plus de détails voir thèse Ismail Mourad [34]).

1.2.2.3 Méthode par éléments frontières

La méthode des éléments frontières est une méthode qui est fondamentalement basée sur la méthode aux éléments finis sauf qu'elle utilise une formulation intégrale qui lui permet, grâce à des théorèmes de réciprocité de réduire le champs des calculs d'un domaine à ses frontières.

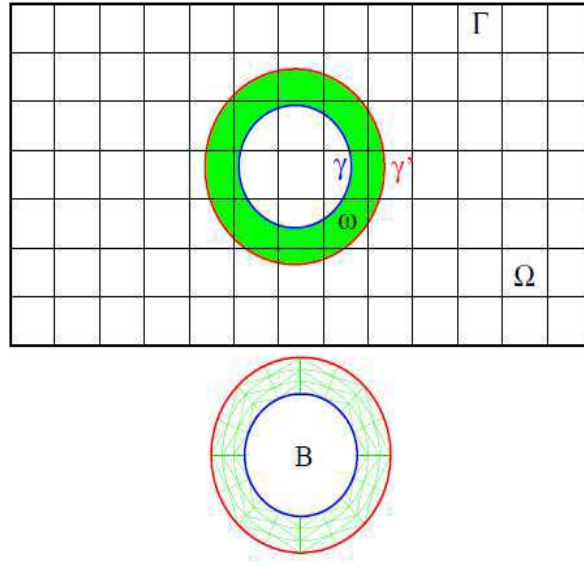


FIG. 1.6 – Méthode de la frontière élargie

Pour illustrer nos propos, prenons l'équation elliptique

$$\begin{cases} \Delta u + b = 0 \text{ dans } \Omega \\ + \text{ des conditions aux limites ad hoc.} \end{cases}$$

(i) L'identité de réciprocité nous dit que

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\partial \Omega} (u v_{,n} - v u_{,n}) dS \quad \text{où } u_{,n} = \nabla u \cdot n$$

(ii) La solution fondamentale est donnée par construction

$$\Delta G(x_c, \mathbf{x}) + \delta(x_c - x) = 0 \quad \text{où } x_c \text{ est un point courant}$$

On choisit $v(\mathbf{x}) = G(x_c, \mathbf{x})$ dans (i) et on obtient ainsi une représentation intégrale de u :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) b(\xi) dV_{\xi} + \int_{\partial \Omega} (G(\mathbf{x}, \xi) u_{,n}(\xi) - G_{,n}(\mathbf{x}, \xi) u(\xi)) dS_{\xi} \quad (1.53)$$

Le premier intérêt trouvé à ces méthodes était d'être radicalement rapide à la condition de connaître les solutions fondamentales pour cette formulation intégrale. Ce

qui est le cas pour les hypothèses dans les domaines infinis ou semi-infinis (souvent utilisées dans les problème de géophysique et l'étude des sols). Dans ces cas, on connaît les solutions fondamentales de façon analytique puisqu'il s'agit des fonctions de Green (exemple dans R^3 , on a $G(\xi, x) = 1/4\pi r$).

Lorsque les solutions analytiques ne sont pas connues, il existe des méthodes numériques qui permettent de les trouver : méthode de collocation, méthode de Galerkin-BEM. Dans un premier temps, ces problèmes ont souffert de leur coût de calcul important et de leur complexité numérique. En effet les méthodes précédemment nommées doivent assembler des matrices pleines (non symétrique pour le cas des méthodes de collocation et symétrique pour le cas Galerkin), et en général, ces méthodes sont destinées à des problèmes dans des grands domaines non bornés. Aujourd'hui de grandes avancées ont été faite dans ce domaine, d'une part, par l'avancé des solveurs itératifs (méthodes multipôles) et d'autre part, par couplage de cette méthode tels que les méthodes d'éléments finie [11] ou de différences finies [59].

Méthode de couplage Différences finies - Eléments frontières Cette méthode est développée par Russell [59] pour modéliser des objets mobiles en 2D dans un fluide visqueux. Elle est basée sur une formulation vorticité des équations de Navier-Stokes et d'un couplage différences finies et éléments frontières. Les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles sont écrite sous la forme :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w = \nu \Delta w \quad (1.54)$$

$$\Delta \psi = w \quad (1.55)$$

$$\mathbf{u} = \nabla^\perp \psi = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (1.56)$$

$$w = \nabla \times \mathbf{u} \quad (1.57)$$

où w désigne la vorticité, \mathbf{u} le champ de vitesse, ν la viscosité cinématique et ψ la fonction de courant du champ de vitesse. La condition d'incompressibilité ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) est implicite dans cette formulation.

Afin de décomposer ce problème complexe en problème plus simple à résoudre, on peut identifier deux sous-systèmes couplés (voir figure 1.7)

Une première étape de calcul consiste alors à résoudre une équation de Poisson en différence finie par une méthode de discontinuité (proche des méthode de frontière

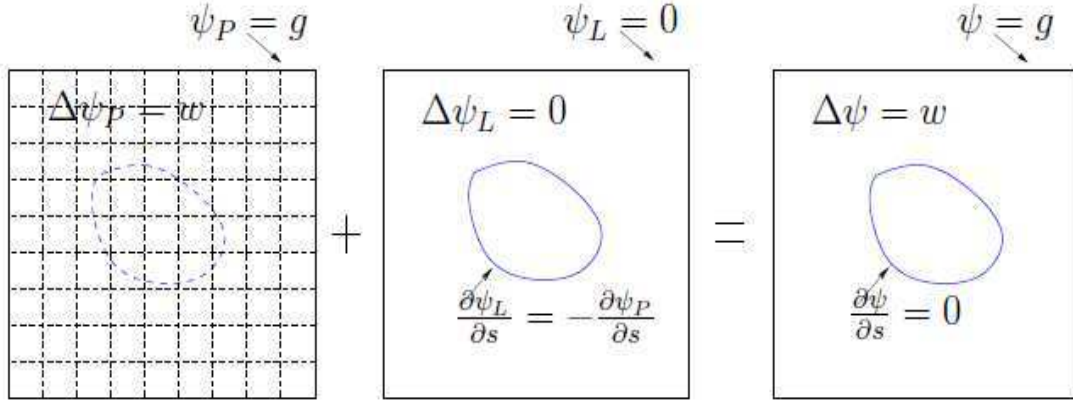


FIG. 1.7 – Couplage Differences finies - BEM

immergées) :

$$\begin{cases} \Delta\psi_P = w & \text{dans } \Omega \setminus \{\text{particule}\} \\ \psi_P = 0 & \text{sinon} \\ \psi_P = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.58)$$

Il faut remarquer tout de suite que la solution ψ_P de ce problème ne satisfait ni les conditions de non-pénétration ni les conditions de non-glissement.

C'est pourquoi, dans une seconde étape, il faut résoudre une équation de Laplace qui fait partie d'un système homogène et pour lequel on possède une solution de Green, ce qui permet d'utiliser une méthode d'élément frontière.

$$\begin{cases} \Delta\psi_L = 0 & \text{dans } \Omega \\ \psi_L(s) = \int_S \frac{\partial\psi_L}{\partial s} dS + C & \text{sur } S. \end{cases} \quad (1.59)$$

On connaît la condition de Dirichlet à une constante près, qui sera déterminée grâce à l'équation

$$\oint_S \frac{\partial\psi_L}{\partial n} dS = 0$$

Pour déterminer la dérivée normale $\frac{\partial\psi_L}{\partial n}$, Russell et al. utilise une méthode au éléments frontières qui lui permet d'écrire des équations intégrales sous la forme :

$$\vartheta(\mathbf{p})\psi_L(\mathbf{p}) = \int_S \psi_L(\mathbf{x}) \frac{\cos(\theta(\mathbf{p}, \mathbf{x}))}{r(\mathbf{p}, \mathbf{x})} dS - \int_S \frac{\partial\psi_L(\mathbf{x})}{\partial n} \ln(r(\mathbf{p}, \mathbf{x})) dS \quad (1.60)$$

où $\vartheta(\mathbf{p})$ représente l'angle intérieur si \mathbf{p} est sur le contour S et $\vartheta(\mathbf{p}) = 2\pi$ sur l'intérieur de l'inclusion. Une fois discrétisée, ces équations seront converties en un problème linéaire sur les points du bord, donnant ainsi la valeur du gradient normal de ψ en ces points.

1.2.3 Approche Eulerienne

Dans l'approche Eulerienne, le maillage est fixe et les mailles de calcul sont traversées par le fluide ainsi que tous les éléments éventuels qui le composent (particules solides, bulles d'air, ...). Pour pouvoir prendre en charge ce type de problème avec des interfaces mobiles ou fixes, deux familles de stratégie se sont développées : les algorithmes de suivi d'interface –"front tracking"– et les algorithmes de capture d'interface –"front capturing"–

1.2.3.1 Avec suivi d'interface

Dans la classe des algorithmes de suivi d'interface ("interface-tracking") nous distinguons deux approches (i) "surface-tracking" et (ii) "volume-tracking". Dans le premier cas, l'interface est représentée par une série de courbes interpolées passant par des points discrets. A chaque pas de temps, on connaît la localisation de ces points qui évoluent pour suivre le mouvement de l'interface. La méthode de "volume-tracking" ne conserve pas une représentation de l'interface mais la reconstruit quand il est nécessaire. Cette reconstruction est faite cellule par cellule et est basée sur la présence d'un champ de marqueurs dans chaque cellule. La méthode de ce type la plus connue est la méthode "marker-and-cell" (MAC). Ces marqueurs servent entre autre à dire si la cellule contient du fluide. Dans la suite nous donnons quelques exemples de méthodes avec suivi d'interface.

Méthode de la frontière immergée

Cette méthode est sans doute, l'une des premières méthodes permettant de calculer des interactions fluide/structure pour des géométries complexes dans des maillages cartésiens. Elle est introduite dans les années 70 par C. Peskin dans le cadre des mathématiques appliqués aux sciences bio-médicales [53].

Sa formulation mathématique utilise un mélange entre variables Euleriennes et Lagrangienne. Par exemple le champ de vitesse sera une variable eulérienne définies

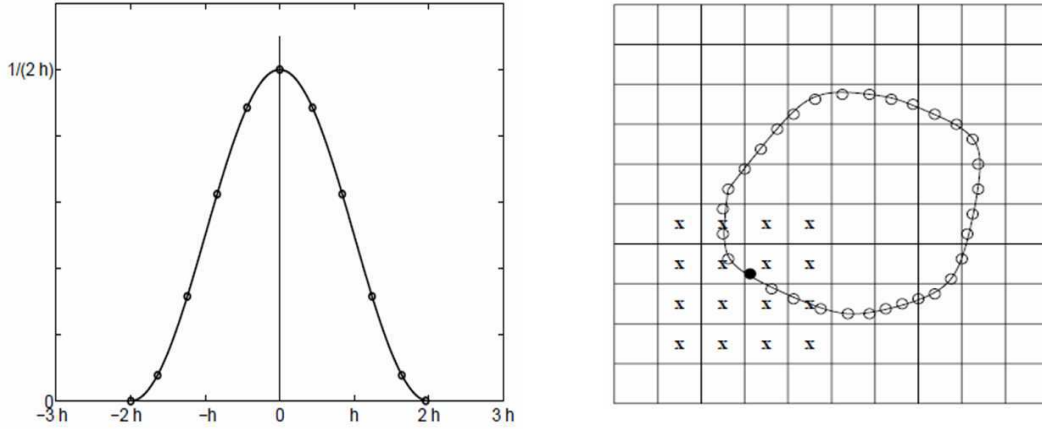


FIG. 1.8 – méthode des frontières immergées

sur une grille cartésienne fixe tel que pour tout

$$(x, y) \in \Omega \times [0, T] \rightarrow u(x, t),$$

Des variables Lagrangiennes sont introduites pour approcher l'interaction fluide/structure sur un maillage curviligne qui évolue librement à travers la maillage cartésien. Si on appelle P l'ensemble des points, on peut donc localiser cette particule grâce à sa description lagrangienne

$$(r, s, t) \in P \times [0, T] \rightarrow X(r, s, t)$$

L'interaction entre ces deux types de variable est permise grâce à une distribution surfacique de Dirac portée par la structure. En pratique, cette interaction est imposée à travers un terme source singulier dans l'équation de Navier-Stokes. Cette force singulière est représentée de façon discrete sous la forme d'une fonction δ . Un exemple typique d'une fonction δ à une dimension :

$$\delta_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{4h} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{2h}\right) & |x| \leq 2h \\ 0 & |x| > 2h. \end{cases} \quad (1.61)$$

où h correspond à la taille d'une maille. Cette fonction est représentée sur la figure

(1.8) à gauche. Pour définir cette fonction en deux dimension, il suffit d'écrire

$$D_{i,j}(x) = \delta_h(x - x_i)\delta_h(y - y_j) \quad (1.62)$$

avec $(x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y)$ sont les coordonnées des points du maillage.

On convertit ainsi un champ de force Lagrangien $F(r, s, t)$ connu, en terme source eulérien dans l'équation de Navier-Stokes

$$\rho(u_t - u \cdot \nabla u) - \eta \Delta u + \nabla p = f$$

où $f(x, t) = \int_S F(r, s, t)\delta(x - X(r, s, t))drds$ et

La conversion entre description lagrangienne et eulerienne se fait donc aisément grâce une fonction delta discrète et on peut décrire comme cela des géométries de diverse complexité. Pour le champ de vitesse, nous avons

$$X_t = u(X(r, s, t), t) = \int_{\Omega} u(x, t)\delta(x - X(r, s, t))dx$$

Le première inconvénient de cette méthode sont qu'il s'agit d'une méthode de consistance d'ordre 1, à cause de la fonction delta qui étend de discontinuités dans les noeuds autour l'interface (figure à droite (1.8)). Ce qui pose des problèmes sur la continuités des dérivées premières du champ de vitesse.

Si le champs de vitesse est interpolé la méthode ne garantit plus la condition d'incompressibilité. Ce qui pose un problème pour la conservation de la masse du système.

Méthode de l'interface immergée

Cette méthode est développé dans les années 70 par R.J. Levêque et Z.L. Li qui considèrent une interface intégrée dans un maillage cartésien uniforme et développent une méthodes aux différences finies capable de résoudre une équation elliptique qui possède des coefficients discontinus et un terme source singulier. La clé de cette méthode est d'incorporer des conditions de sauts dans le développement limité du laplacien près de l'interface ce qui permet d'avoir une convergence simple du seconde ordre. Les modifications des dérivées du laplacien apparaissent comme des termes sources correctifs et si l'équation elliptique possède des coefficients discontinue, alors on aura besoin d'un stencil à six points près de l'interface (voir thèse de Long lee [41]).

Méthode des différences finies corrigé

Les deux méthodes que nous venons de citer pourrait faire partie de ce volet. Cette

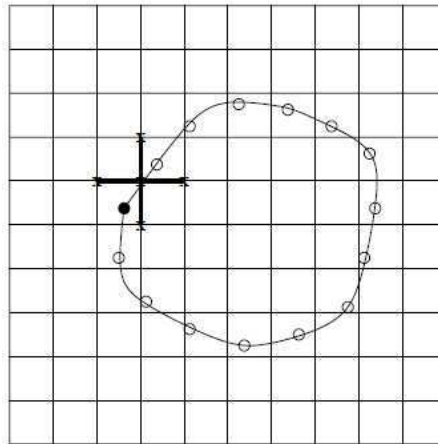


FIG. 1.9 – méthode interface immergée

approche introduite par D. Cahloun [10] est basée sur un schéma de différences finies à cinq points, modifié par un terme de correction qui agit sur les sommets proche du bord de l'objet (voir figure 1.10). Formellement, on peut dire que le schéma est d'ordre 1 au voisinage de la particules et d'ordre 2 ailleurs.

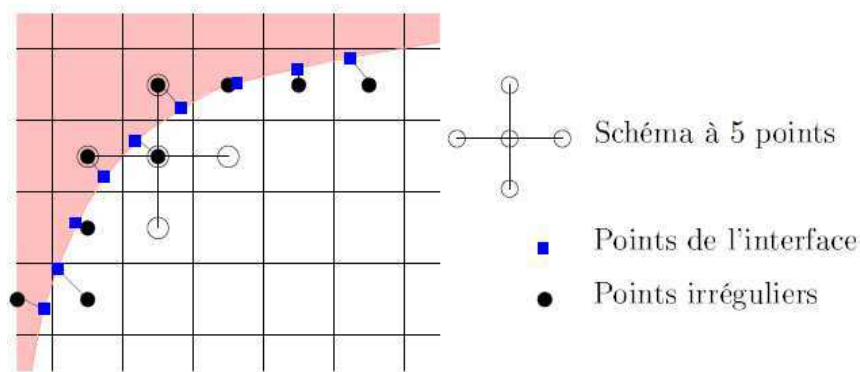


FIG. 1.10 – Schéma aux différences finies corrigé

1.2.3.2 Avec capture d'interface

Dans ces méthodes, l'interface est reconstruite à partir des champs de variable appropriées. On distingue deux grandes familles selon que les champs utilisés soient continues ou discontinues. Parmi les méthodes discontinues, on trouve la méthode

Volume-Of-Fluid (VOF) suggérée par Hirt et Nichols [33]. Cette méthode définit une fonction qui est égale à l'unité sur les points occupés par le fluide et zero ailleurs. Ainsi l'interface est une ligne discontinue et satisfait une équation de pure convection.

Dans l'approche continue, on a la famille des fonctions levelset.

Méthode des champs de Level-set

La méthode des champs de niveau ou Level-set est une méthode qui a connu un formidable essor durant ces dix dernières années. Elle est fréquemment utilisée pour localiser une interface avec de grand avantage [44, 51, 65]. La position de l'interface est identifiée comme une ligne de niveau d'une fonction ϕ typiquement définie comme une fonction distance qui serait positive dans un domaine et négative dans le domaine di-joint. A partir de ces informations on peut remonter à des informations capitales sur l'interface comme la normale et le rayon de courbure grâce à sa dérivée. De plus si l'interface est mise en mouvement par un champs de vitesse \mathbf{u} , alors ϕ est solution de l'équation de transfert suivante :

$$\phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0$$

Cette méthode est souvent combinée à d'autres pour pouvoir être efficace dans des problèmes à géométries complexes. On peut citer une méthode assez récente qui donne de très bon résultat, il s'agit de la méthode X-FEM/levelset. Dans le cas d'une méthode d'élément fini classique on sait qu'il est aisé d'implémenter des conditions de bord sur une géométrie quelconque. Quand cette géométrie est fixe les coûts de calcul sont intéressants car le maillage est défini une seule fois. Par contre lorsque les géométries changent, il faut souvent remailler. L'idée de la méthode XFEM est de garder un maillage fixe et éventuellement cartésien qui voit la géométrie grâce aux champs de levelset qui sont ajoutés sur les noeuds proches de l'interface comme informations additionnelles.

Chapitre 2

La méthode $\phi - \psi$

Sommaire

2.1	Motivation	36
2.2	Présentation de la méthode	39
2.2.1	La fonction de courant	39
2.2.2	La pression conjuguée	40
2.3	La formulation des conditions de bord	42

2.1 Motivation

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le développement de méthodes numériques pour simuler les équations de Navier-Stokes en présence de parois rigides est un sujet en pleine activité. Si la littérature abonde de résultats de convergence et de stabilité [1, 16], les méthodes à pas fractionnaire présentent en effet, très généralement, des erreurs de couche limite pour la pression. Ce problème, déjà présent près de parois conformes à la discrétisation [29], devient particulièrement critique près de parois non-conformes, une situation que l'on rencontre dès que l'on souhaite s'affranchir de toute forme de remaillage avec des objets mobiles, par exemple.

Ces erreurs de couche limite sont intimement liées au problème elliptique qui intervient dans toutes ces méthodes, qu'elles soient à pas fractionnaire [6, 8, 16] ou purement implicites [2]. Afin d'en illustrer l'origine, considérons, pour simplifier, le problème de Stokes incompressible, dans un domaine borné, régulier Ω :

$$\rho \mathbf{u}_t = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad . \quad (2.1b)$$

Ces équations sont complétées d'une condition initiale :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.2)$$

et d'une condition de bords, que nous supposons toujours exprimées en vitesse :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_b(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ et } t \geq 0 \quad (2.3)$$

En appliquant l'opérateur divergence à l'équation (2.1a), on voit que la pression vérifie l'équation de Poisson suivante :

$$\Delta p = \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (2.4)$$

Elle n'est définie qu'à travers le problème implicite ainsi posé, mais ne possède pas de conditions de bord en propre. Si nous supposons, cependant, que tous les champs (u, v, p) du problème sont suffisamment réguliers, (2.1) peut être étendue jusqu'au bord, et fournit des conditions fortes sur ∇p au bord. Mais la pression est un champ scalaire, et une condition sur toutes les composantes de son gradient est équivalente à deux conditions de bord : une condition de Neumann et une condition de Dirichlet

(à des constantes d'intégration près). Or on sait que le problème de Poisson muni soit d'une condition de Neumann, soit d'une condition de Dirichlet possède une unique solution. Le problème de Poisson (2.4) semble alors surconditionné.

Une autre façon d'envisager cette difficulté est de considérer que tout champ de pression calculé en résolvant le problème (2.4), avec e.g. les conditions de Neumann, doit nécessairement vérifier la condition de Dirichlet correspondante. De ce point de vue, le surconditionnement du problème de Poisson pour p est une propriété des conditions de bord elles-mêmes, c'est à dire une propriété des champs de vitesse admissibles comme solutions des équations de Stokes. Il ne fait pas de doute que les champs de vitesse générés par les équations de Stokes sont un sous-ensemble assez contraint des champs solénoïdaux. Le principe des méthodes de projection est de forcer le champ de vitesse à rester incompressible en utilisant la pression comme multiplicateur de Lagrange [12, 64]. Mais en projetant un champ de vitesse test sur les champs solénoïdaux, et en négligeant tout un ensemble d'autres contraintes plus intriquées qu'il devrait aussi vérifier, on est facilement amené à poser le problème de Poisson pour p sous une forme qui n'est plus pertinente.

Les méthodes que l'on trouve dans la littérature tentent de pallier ce problème de diverses façons. Ainsi, les méthodes d'éléments finis se prêtent naturellement à une écriture du problème de Stokes sous forme faible, et à un traitement du problème implicite pour p issu de (2.1) par la minimisation de fonctionnelles. On évite ainsi d'avoir à introduire pour p un problème dont les conditions fortes seraient inconsistantes. Mais on est contraint à écrire les conditions sur des bases d'éléments finis : un objet rigide à l'intérieur d'un écoulement sera représenté par un certain nombre, fini, d'éléments [4]. S'il se déplace, sa représentation en éléments finis doit effectuer de temps en temps des sauts discrets.

E et Liu [16] classifient les méthodes selon qu'elles traitent de façon précise (i) la condition de bord en vitesse, ou (ii) en pression, ou encore (iii) qu'elle utilisent des incréments de pression. Ces différentes tentatives conduisent à des résultats assez variables, les méthodes de type (i) et (iii) pouvant mener à des champs de pression qui ne vérifient pas du tout les conditions de bord attendues. Ainsi, les premières méthodes de projection de Temam et Chorin [13, 64] conduisent à une condition de bord du type $\mathbf{n} \cdot \nabla p = 0$ [16]. Les méthodes de type (i) et (iii) conduisent aussi à des champs de pression dont $\mathbf{n} \cdot \nabla p$ est stationnaire en temps. Les incréments de pression proposés dans [1, 39] et étudiés en détail par Guermond et Al. [29] cherchent à garantir que $\mathbf{n} \cdot \nabla p$ vérifie tout au moins la condition déduite de (2.1).

De nombreux travaux tentent de contourner entièrement la résolution du problème

de Poisson pour p en travaillant dans des formulations potentielles. C'est le cas des méthodes de vortacité [10, 17, 59]. Mais dans ces méthodes, les conditions de bord deviennent encore plus compliquées, étant non-locales puisque la continuité des vitesses contraint en principe des intégrales du champ de vortacité. Par ailleurs, il est particulièrement difficile de remonter au champ de pression à partir de la vortacité. Une autre formulation proposée par Ben-Artzi [3] est assez proche de nos travaux mais conduit à des implémentations faisant intervenir l'inversion d'un bi-Laplacien, ce qui est évidemment fort coûteux numériquement.

Nous proposons ici une formulation potentielle qui se prête à une implémentation numérique "légère" ne faisant intervenir que la résolution d'un problème de Poisson classique avec conditions de bord de Dirichlet (en lieu et place du problème de Neumann qui est en général prescrit pour calculer la pression dans les implémentations classiques [1, 8, 14, 16] de la méthode de projection). Dans la classification de E et Liu [16], notre travail s'inscrit clairement parmi les méthodes précises en pression [40], notre objectif premier étant de trouver des formulations garantissant que le problème de Poisson pour p vérifie à la fois les deux conditions de Dirichlet et de Neumann induites par Stokes.

Pour progresser dans cette voie, nous allons aborder deux types de méthodes. Les chapitres 2 à 6 sont basés sur une réécriture du problème de Stokes en terme de la fonction courant. Cette réécriture fait intervenir un champ noté ϕ qui est—en deux dimensions—une sorte de conjugué harmonique de la pression. Cette approche permet d'écrire le problème de Stokes sous une forme intégrée : ainsi, la fonction ϕ , au lieu d'être "homogène" à $\Delta \mathbf{u}$ comme la pression l'est, sera d'ordre $\Delta \psi$. Comme la pression, ϕ sera la solution d'un problème elliptique, mais qui fera intervenir de façon naturelle une seule condition de bord (Dirichlet). Le chapitre 2 est consacré à la présentation de la méthode. Au chapitre 4 nous verrons quels sont les problèmes rencontrés dans la résolution du problème elliptique pour ϕ . Puis au chapitre 5 nous aborderons l'intégration numérique du problème couplé ϕ - ψ proprement dit. Une seconde méthode s'appuiera sur l'existence de cette pression conjuguée ϕ , mais pour écrire des équations sous une forme naturelle, en pression et vitesse. Le chapitre 6 "méthode hybride" y est consacré.

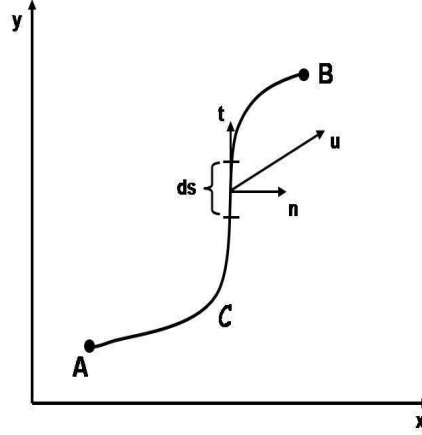


FIG. 2.1 – Représentation d’une courbe C reliant les points A et B dans un plan (x,y) . ds est l’élément différentiel le long de C , \mathbf{n} et \mathbf{t} sont respectivement le vecteur unitaire normal et tangent

2.2 Présentation de la méthode

2.2.1 La fonction de courant

Il est bien connu qu’en dimension 2, tout champ de vitesse \mathbf{u} incompressible dérive d’un potentiel ψ , appelé la fonction de courant. Même si ce résultat est classique, il est au cœur de la représentation que nous utilisons et il s’avérera utile d’avoir à l’esprit la façon dont il s’obtient. On introduit pour cela le débit massique M traversant une courbe C reliant deux points A et B arbitraires dans le plan (voir fig. 2.1) :

$$M = \int_C \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.5)$$

où ds est l’élément différentiel le long de C et \mathbf{n} le vecteur unitaire de composantes

$$\mathbf{n} = \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) \quad (2.6)$$

L’incompressibilité garantit que M est indépendant du chemin d’intégration. Ceci étant valable pour toute paire (A, B) , la propriété $\psi_B = \psi_A + M/\rho$ permet de définir la fonction courant à une constante près (sur toute composante connexe du domaine

d'intégration). Par ailleurs on peut encore écrire :

$$M = \rho \int_C (u, v) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) ds = \rho \int_C (u dy - v dx) \quad (2.7)$$

et

$$M = \rho(\psi_B - \psi_A) = \rho \int_C \frac{d\psi}{ds} ds = \rho \int_C \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) \quad (2.8)$$

ce qui donne, par identification :

$$\begin{cases} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \mathbf{u} = \nabla^\perp \psi \quad (2.9)$$

où l'on a défini l'opérateur ∇^\perp .

Le point de départ de la méthode que nous appelons “ $\phi - \psi$ ” est un ensemble d'équations aux dérivées partielles qui régissent l'évolution de la fonction courant. L'intérêt de travailler dans cette représentation est de garantir l'incompressibilité. Étonnament, cette formulation du problème de Stokes est totalement absente de la littérature récente.

Nous présentons ici le principe de la méthode pour les équations de Stokes, le cas général des équations de Navier-Stokes étant traité en annexe I. Dans (2.1), nous éliminons le champ de vitesse (u, v) en utilisant (2.9) pour obtenir :

$$\begin{cases} \rho(\psi_t - \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi)_y &= -p_x + f^x \\ -\rho(\psi_t - \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi)_x &= -p_y + f^y \end{cases} \quad (2.10)$$

Partant de ces équations, une suite classique consisterait à prendre une combinaison de leurs dérivées pour écrire une équation sur la vortécité, $\omega = \Delta \psi$ — convention de signe Happel et Brenner [31]. C'est la voie qui mène aux méthodes développées par Russell, [59], Calhoun [10] ou Ben-Artzi [3]. Au lieu de cela, nous cherchons à les “intégrer” afin d'obtenir des équations régissant l'évolution de ψ lui-même.

2.2.2 La pression conjuguée

Notons Q la quantité :

$$Q = \int_C (\nabla p - \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.11)$$

où ds est l'élément différentiel le long de C et \mathbf{n} le vecteur unitaire défini par (2.6). L'équation de Poisson sur p (2.4) garantit que Q est indépendant du chemin d'intégration exactement comme le débit massique M défini auparavant. Comme précédemment, la propriété $\phi_B = \phi_A + Q/\rho$ définit une fonction ϕ à une constante près. Par ailleurs, on peut encore écrire :

$$Q = \int_C (p_x - f^x, p_y - f^y) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) ds = \int_C ((p_x - f^x)dy - (p_y - f^y)dx)$$

et

$$Q = \rho(\phi_B - \phi_A) = \rho \int_C \frac{d\phi}{ds} ds = \rho \int_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right)$$

ce qui donne, par identification :

$$\begin{cases} \rho \phi_y = p_x - f^x \\ \rho \phi_x = -p_y + f^y \end{cases} \quad \text{soit} \quad \rho \nabla^\perp \phi = \nabla p - \mathbf{f} \quad (2.12)$$

A travers cette relation, on voit que le champ ϕ est une sorte de conjugué harmonique de la pression. Bien évidemment, on peut voir par intégration de l'équation (2.12) le long de contours arbitraires qu'elle suffit à définir une unique fonction ϕ (à une constante près). Cela implique, par identification avec les équations (2.10) que l'on peut écrire :

$$\psi_t = \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi - \phi \quad (2.13)$$

ce qui est une équation d'évolution pour ψ . Cette équation aux dérivées partielles est de type parabolique : pour que le problème soit bien posé, il nous faudra préciser, outre la condition initiale

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \psi(x, y, t = 0) = \psi_0(x, y) \quad (2.14)$$

une condition aux limites scalaires pour ψ sur le bord $\partial\Omega$ du domaine Ω .

Cette équation de diffusion est par ailleurs munie de deux conditions de bords, puisque le champ de vitesse, c'est à dire les deux composantes du gradient de ψ sont connues au bord. Afin d'intégrer (2.13) en temps, il faut par ailleurs connaître à chaque instant le champ ϕ . Pour cela, nous allons établir une nouvelle équation en faisant la soustraction des dérivées des équations (2.12). On trouve que ϕ est la

solution d'une équation de Poisson¹ :

$$\rho \Delta \phi = \nabla \times \mathbf{f} \quad (2.15)$$

qui devra être munie d'une condition de bord scalaire afin de garantir l'unicité de la solution. L'évolution de la fonction de courant est donc gouvernée par les équations (2.13) et (2.15) avec les conditions aux limites qui restent à préciser.

Le champ de vitesse sera aisément obtenu à l'ordre 2 par dérivation de la fonction courant. Le calcul de la pression est un peu plus délicat. Le problème de Poisson vérifié par p est défini à travers les équations (2.4).

2.3 La formulation des conditions de bord

Nous avons remplacé le problème de Stokes, qui fait intervenir un champ de vecteur \mathbf{u} et un champ scalaire p par un problème qui ne fait intervenir que deux champs scalaires. Notre problème est toujours muni d'une double condition de bord, les deux composantes du champ de vitesse étant prescrites. La continuité de vitesse au bord revient, à travers (2.9), à prescrire le gradient de ψ . Classiquement, cette double condition peut s'écrire comme (i) une condition de Neumann $\mathbf{n} \cdot \nabla \psi = -\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}$ (ii) une condition de Dirichlet – à des constantes près. Or sur toute composante connexe $\partial\Omega^\alpha$ du bord $\partial\Omega$ (voir Figure 2.2), on peut intégrer la condition sur la composante tangentielle du gradient de ψ , $\mathbf{t} \cdot \nabla \psi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ pour obtenir :

$$\forall s \in \partial\Omega^\alpha, \quad \psi(s, t) = \int_0^s \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, ds + c^\alpha \quad (2.16)$$

Ces deux conditions sont à mettre en parallèle des équations (2.13) et (2.15) qui font intervenir deux laplaciens de champs scalaires. Nous choisirons dans la suite d'utiliser la condition de Neumann pour ψ dans son équation d'évolution (2.13). Ce choix est guidé par l'idée que cette condition correspond au non-glissement du fluide à la paroi, tandis que le laplacien apparaissant au terme de droite de (2.13) correspond précisément aux efforts visqueux. La condition de Dirichlet sur ψ correspond à la continuité de la vitesse normale au bord. C'est une condition liée à l'incompressibilité qu'il semble naturel d'associer à l'équation définissant ϕ puisqu'elle est conjuguée à

¹Cette équation de Poisson masque l'écriture d'un bilaplacien $\rho \Delta(\Delta\psi - \psi_t) = \nabla \times \mathbf{f}$. Ben-Artzi et al. étudie la régularité de cette équation dans [2, 3], ce problème est mathématiquement bien posé si $\phi(\bullet, t) \in \Delta(H_0^2(\Omega))$ sous-espace de la "dynamique du champ de vorticité" (associ    une condition de non-glissement).

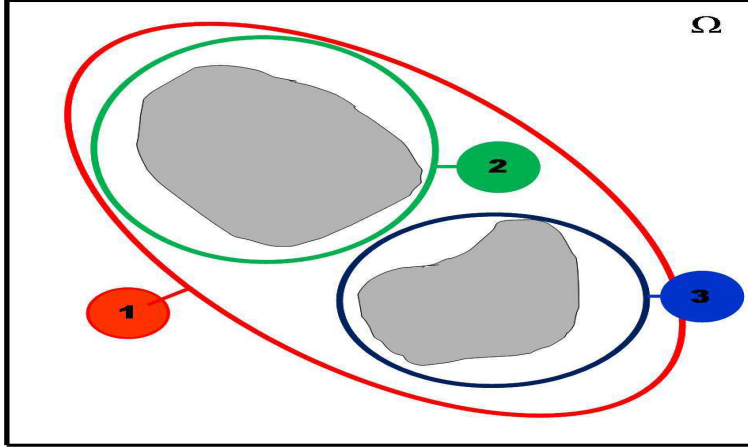


FIG. 2.2 – Exemples de contours autour de particules immergées dans un domaine fluide

la pression.

Nous voyons que la représentation $\phi-\psi$ permet d'exprimer la condition de continuité des vitesses de façon beaucoup plus naturelle que la formulation traditionnelle de Stokes : il n'y a plus de problème analogue au surconditionnement de l'équation de Poisson pour la pression telle qu'il apparaît dans les méthodes de projection (voir section 4.3 pour plus de détails). Une difficulté cependant apparaît puisqu'en principe, la continuité des vitesses ne permet de connaître les conditions de Dirichlet sur ψ , et donc sur ϕ , qu'à des constantes près sur chaque composante connexe du bord. En conséquence le problème de Poisson (2.15) pour ϕ se présente sous la forme :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \rho \Delta \phi = \nabla \times \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \phi = \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi - (\tilde{\psi}_t + c_t^\alpha) & \text{sur } \partial\Omega^\alpha. \end{cases} \quad (2.17)$$

où $\tilde{\psi} = \int_0^s \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$, est intégré à partir d'une origine arbitraire sur le bord $\partial\Omega^\alpha$

Les valeurs de ces constantes c_t^α sont fixées par le fait que ϕ doit être conjugué à la pression à travers les équations (2.12). En effet, étant donné un contour fermé (voir figure 2.2), considérons les intégrales de la forme :

$$\oint t \cdot (\rho \nabla^\perp \phi + \mathbf{f}) \quad (2.18)$$

l'équation (2.15) garantit que leur valeur est uniforme sur toute classe de contours fermées homotopes. Par ailleurs, p étant monovalué, ces intégrales doivent être nulles.

Les équations $\oint t \cdot (\rho \nabla^\perp \phi + \mathbf{f}) = \mathbf{0}$ considérées sur les contours $\partial\Omega^\alpha$ suffisent pour traiter le problème (2.17), on le décompose ainsi par linéarité, en notant ϕ_0 la solution de

$$(\mathcal{S}_0) \begin{cases} \rho \Delta \phi &= \nabla \times \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \phi &= \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi - \tilde{\psi}_t & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.19)$$

Et pour tout contour $\alpha \in [1, m]$ on écrit des systèmes \mathcal{S}_α tels que

$$(\mathcal{S}_\alpha) \begin{cases} \rho \Delta \phi &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \phi &= -1 & \text{sur } \partial\Omega^\alpha. \end{cases} \quad (2.20)$$

La solution du problème (S) s'écrit donc :

$$\phi = \phi_0 + \sum_{\alpha=1}^n c_t^\alpha \phi_\alpha \quad (2.21)$$

On injecte la solution (2.21) dans la relation (2.18)

$$\begin{aligned} \oint n \cdot \nabla \phi_0 + \sum_{\alpha=1}^m c_t^\alpha \oint n \cdot \nabla \phi_\alpha &= \oint t \cdot f \\ \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^m c_t^\alpha \oint n \cdot \nabla \phi_\alpha &= \oint t \cdot f - \oint n \cdot \nabla \phi_0 \end{aligned}$$

On définit les intégrales

$$a_{\alpha,\beta} = \oint_{\partial\Omega_\alpha} n \cdot \nabla \phi_\beta \text{ et } b_\alpha = \oint_{\partial\Omega_\alpha} t \cdot f - \oint_{\partial\Omega_\alpha} n \cdot \nabla \phi_0$$

et obtient enfin le système matriciel suivant

$$\forall \beta, \quad \sum_{\alpha=1}^m c_t^\alpha a_{\alpha,\beta} = b_\beta \quad (2.22)$$

Au bilan, pour résoudre le problème (2.17), on doit résoudre n problèmes de Poisson : le problème (2.19) et $n-1$ problèmes de la forme (2.20), la fonction ϕ n'étant définie qu'à une constante globale près. Pour obtenir la valeur des constantes c^α , il suffit

d'intégrer sur $[0, T]$ les solutions du système (2.22) :

$$c^\alpha = \int_0^T c_t^\alpha dt \quad (2.23)$$

Mais la valeur intrinsèque de ces constantes est non pertinente puisque seules leurs dérivées temporelles apparaissent dans les équations d'évolution du problème ψ

Chapitre 3

Quelques choix d'implémentation

Sommaire

3.1	Discrétisation spatiale	48
3.1.1	La grille MAC	48
3.1.2	Domaines discrets	50
3.1.3	Convention d'indexation	51
3.2	Méthodes de validation numérique	53
3.2.1	Le test de Guermond et Shen	53
3.2.2	Normes	55

Nous précisons ici de nombreuses conventions et notations utilisées dans la suite du manuscrit. Un lecteur familier avec la discrétisation MAC [32] pourra parcourir rapidement les sections 3.1.1 et 3.1.3. La section 3.2.2 présente des définitions aussi parfaitement usuelles des normes utilisées. La lecture de la section 3.1.2 est par contre essentielle pour la suite.

3.1 Discrétisation spatiale

3.1.1 La grille MAC

Dans ce travail, les champs seront discrétisés sur la grille MAC introduite par Harlow et Welch [32]. Pour un pas régulier $\Delta x \times \Delta y$ et une origine $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on note $(x_\alpha, y_\beta) = (x_0 + \alpha \Delta x, y_0 + \beta \Delta y)$ et on définit les ensembles :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \{(x_i, y_j), \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2\} \\ \mathcal{M}_u &= \{(x_i, y_{j+1/2}), \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2\} \\ \mathcal{M}_v &= \{(x_{i+1/2}, y_j), \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2\} \\ \mathcal{M}_p &= \{(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}), \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}\end{aligned}$$

Les points de \mathcal{M} seront appelés *points de base* de la grille. Par convention, les champs de grille correspondants à ϕ ou ψ prendront leur valeurs sur ces points. Les champs de vitesse et de pression, prendront les leurs sur les sous-grilles décalées, $\mathcal{M}_u, \mathcal{M}_v, \mathcal{M}_p$. Cette convention est illustrée sur la figure 3.1, où les points de $\mathcal{M}_p, \mathcal{M}_u, \mathcal{M}_v$, sont représentés par les symboles "o", " Δ " et " \square " (resp.). Le terme source $\mathbf{f} = (f^x, f^y)$ sera localisé sur les ensembles $\mathcal{M}_u, \mathcal{M}_v$, comme les champs u et v .

L'intérêt de la grille MAC est que la plupart des gradients qui vont apparaître dans le problème pourront être calculés en utilisant des différences centrées, qui sont des approximations d'ordre 2. C'est cette propriété qui détermine sur quelles sous-grilles les champs doivent être positionnés les uns relativement aux autres. Nous noterons $\delta = (\delta_x, \delta_y)$ les opérateurs de différences centrées usuels. Il peuvent être définis pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et toute fonction continue sur le plan \mathbb{R}^2 , à travers l'expression :

$$\begin{aligned}[\delta_x A](x, y) &= \frac{A(x + \frac{1}{2} \Delta x, y) - A(x - \frac{1}{2} \Delta x, y)}{\Delta x} \\ [\delta_y A](x, y) &= \frac{A(x, y + \frac{1}{2} \Delta y) - A(x, y - \frac{1}{2} \Delta y)}{\Delta y}\end{aligned}\tag{3.1}$$

On voit sur la Figure 3.1 que les points où les champs u, v, p prennent leur valeurs

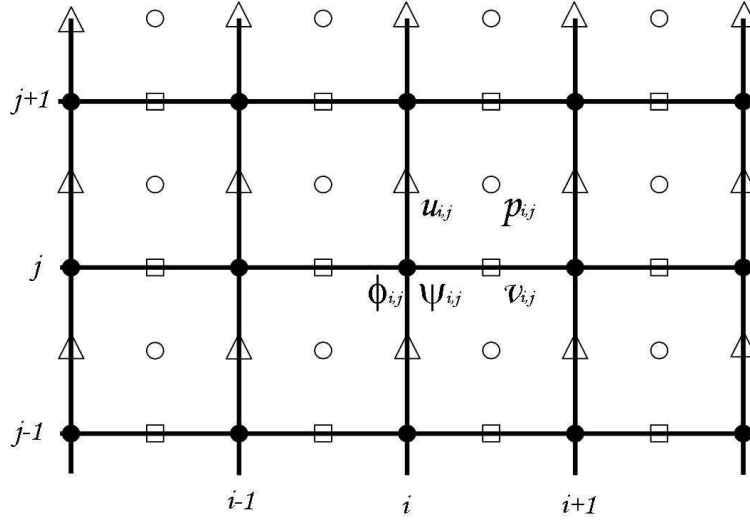


FIG. 3.1 – Représentation d'une grille MAC (Marker And Cell).

sont choisis de telle sorte que $\delta_x p$ (resp. $\delta_y p$) est défini sur les points de \mathcal{M}_u (resp. \mathcal{M}_v). Cela permet, par exemple, d'écrire l'équation de Stokes à l'ordre 2 en utilisant seulement une formule en différences centrées pour δp . De même, le choix de localiser les champs ψ (et donc ϕ) sur \mathcal{M} est guidé par la définition (2.9) de la fonction de courant. On voit en effet que les composantes de $\delta^\perp \psi = (\delta_y \psi, -\delta_x \psi)$ sont ainsi calculées sur les grilles \mathcal{M}_u et \mathcal{M}_v , comme il se doit. On notera que les gradients $\delta^\perp \phi$ et δp se positionneront naturellement sur les mêmes sous-grilles, ceci étant à mettre en regard de l'expression (2.12). On note enfin que deux dérivées du champ de vitesse, $\delta_x u$ et $\delta_y v$, celles-là même qui définissent la divergence, seront ainsi calculées par différences centrées aux points de \mathcal{M}_p . Les dérivées discrètes $\delta_y u$, $\delta_x v$ et la vorticité $\delta \times \mathbf{u} = \delta_x v - \delta_y u$, par contre seront définies sur \mathcal{M} .

Pour résumer, on voit que les opérateurs δ_x et δ_y définissent des transformations entre les fonctions de grille. Les relations entre les espaces $\mathbb{R}^{\mathcal{M}_A}$ peuvent être représentées de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^{\mathcal{M}_p} & \xleftrightarrow{\delta_x} & \mathbb{R}^{\mathcal{M}_u} \\
 \uparrow \delta_y & & \uparrow \delta_y \\
 \mathbb{R}^{\mathcal{M}_v} & \xleftrightarrow{\delta_x} & \mathbb{R}^{\mathcal{M}}
 \end{array}$$

On voit clairement à partir de ce schéma que les dérivées d'ordre 2, δ_x^2 ou δ_y^2 , et bien

sûr le laplacien $\delta^2 = \delta_x^2 + \delta_y^2$, envoient chaque espace de fonction $\mathbb{R}^{\mathcal{M}_A}$ sur lui-même.

3.1.2 Domaines discrets

Rappelons que nous souhaitons aborder des situations dans lesquelles le bord du domaine n'est pas régulier. Pour fixer les idées, nous suivrons l'exemple d'un problème d'écoulement dans un domaine rectangulaire, en présence d'une inclusion, comme représenté sur les figures 3.2. Ce schéma illustre plusieurs des conventions qui sont adoptées dans l'ensemble de ce travail.

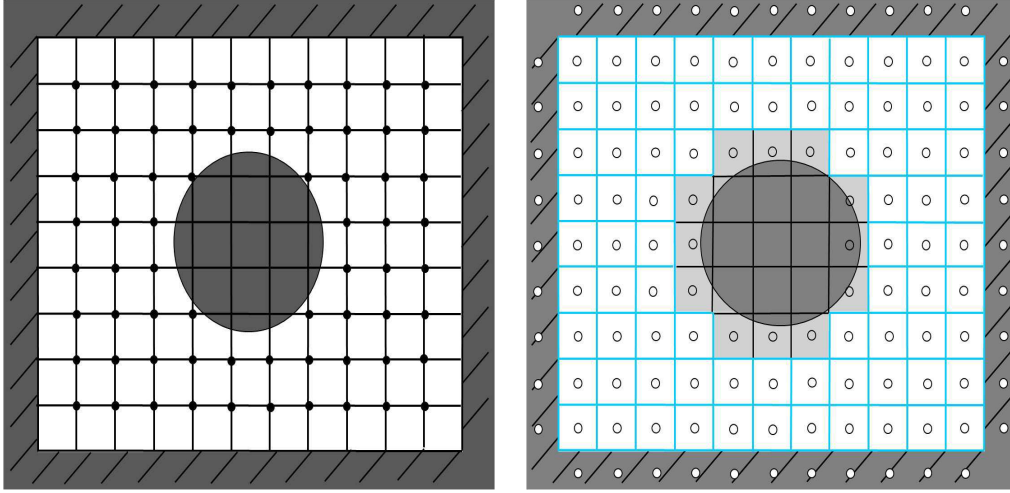


FIG. 3.2 – Exemple de domaines discrets : à gauche les points du domaine Ω_ϕ sont représentés par des \bullet ; à droite les montants de la grille MAC portant les points de $\Omega_u \cup \Omega_v$ sont colorés en bleu et les points de Ω_p désignés par les symboles \circ .

Nous travaillerons sur un domaine rectangulaire $\Omega = [x_0, x_0 + L_x] \times [y_0, y_0 + L_y]$ en utilisant les valeurs du pas $\Delta x = L_x/N_x, \Delta y = L_y/N_y$, pour $(N_x, N_y) \in \mathbb{N}^2$, de sorte que les bords réguliers sont alignés avec la sous-grille de base \mathcal{M} . Ce choix simplifiera le traitement des conditions de bord dans de nombreux problèmes rencontrés.

Nous écrirons les équations d'évolution du problème ϕ - ψ présenté au chapitre 2 sur $\Omega_\phi = \mathcal{M} \cap \overset{\circ}{\Omega}$. Ce sont les points représentés figure 3.2 (à gauche) par les symboles (\bullet). Notons bien que cette définition exclut du domaine d'intégration Ω_ϕ les points de la grille qui sont sur le bord régulier du domaine. Le domaine Ω_ϕ complété des points du bord sera noté $\overline{\Omega}_\phi \equiv \mathcal{M} \cap \overline{\Omega}$.

Bien sûr, la vitesse étant spécifiée au bord du domaine, nous aurons accès aux valeurs de la fonction courant sur tout $\overline{\Omega}_\phi$. À partir de ces valeurs, on ne pourra accéder au

champ de vitesse par différences centrées qu'en certains points. On notera ainsi :

$$\begin{aligned}\Omega_u &= \{(x_i, y_{j+1/2}) : (x_i, y_j) \in \overline{\Omega}_\phi \text{ et } (x_i, y_{j+1}) \in \overline{\Omega}_\phi, \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2\} \\ \Omega_v &= \{(x_{i+1/2}, y_j) : (x_i, y_j) \in \overline{\Omega}_\phi \text{ et } (x_{i+1}, y_j) \in \overline{\Omega}_\phi, \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}\end{aligned}$$

Les points correspondants se situent sur les montants de la grille MAC représenté en bleu sur la figure 3.2 (à droite). Notons que $\Omega_u \neq \mathcal{M}_u \cap \overline{\Omega}$ et $\Omega_v \neq \mathcal{M}_v \cap \overline{\Omega}$: en effet, il ne suffit pas qu'un point soit dans $\mathcal{M}_u \cap \overline{\Omega}$, par exemple, pour pouvoir être calculé par différence centrée à partir d'un champ ψ défini sur Ω_ϕ . Les définitions choisies garantissent que \mathbb{R}^{Ω_u} et \mathbb{R}^{Ω_v} soient images de $\mathbb{R}^{\overline{\Omega}_\phi}$ par les gradients discrets appropriés : $\mathbb{R}^{\Omega_u} = \delta_y(\mathbb{R}^{\overline{\Omega}_\phi})$ et $\mathbb{R}^{\Omega_v} = \delta_x(\mathbb{R}^{\overline{\Omega}_\phi})$.

Enfin, nous verrons que la méthode ϕ - ψ nous permettra d'accéder au champ de pression aux points indiqués par les symboles (o) sur la figure 3.2 (à droite). Ce domaine sera noté Ω_p . Ces points sont les centres de toutes les cellules dont au moins un coté portent un point de Ω_u ou Ω_v . Ω_p correspond au lieu de toutes les valeurs du champ de pression qui interviennent dans la relation (2.12), discrétisée sur les points de $\Omega_u \cup \Omega_v$. Cette définition garantit que $\mathbb{R}^{\Omega_u} = \delta_x(\mathbb{R}^{\Omega_p})$ et $\mathbb{R}^{\Omega_v} = \delta_y(\mathbb{R}^{\Omega_p})$. Les relations induites par les gradients discrétisés entre les différents champs du problème peuvent être résumées de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\Omega_p} & \xrightarrow{\delta_x} & \mathbb{R}^{\Omega_u} \\ \downarrow \delta_y & & \uparrow \delta_y \\ \mathbb{R}^{\Omega_v} & \xleftarrow{\delta_x} & \mathbb{R}^{\overline{\Omega}_\phi} \end{array}$$

Un autre sous domaine de \mathcal{M}_p qui intervient dans notre implémentation est l'ensemble des points où nous sommes en mesure de calculer la divergence du champ de vitesse. C'est donc $\delta_x(\mathbb{R}^{\Omega_u}) \cap \delta_y(\mathbb{R}^{\Omega_v})$ que l'on notera $\mathring{\Omega}_p$. C'est l'ensemble des points au centre des cellules apparaissant en blanc sur la figure 3.2-(droite).

3.1.3 Convention d'indexation

Dans cette section, nous précisons des détails d'implémentation qui sont inutiles en première lecture. Ils sont liés à la convention habituellement utilisées pour indexer les valeurs des champs sur la grille MAC.

En effet, au cours de l'implémentation numérique, nous aurons besoin d'indexer les

valeurs des champs u, v, p, ϕ, ψ par des valeurs (i, j) entières, alors que la grille MAC fait intervenir des points semi-entiers. La notation classique, schématisée figure 3.1 consiste à écrire :

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= u(x_i, y_{j+1/2}) \\ v_{i,j} &= v(x_{i+1/2}, y_j) \\ p_{i,j} &= p(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}) \\ \phi_{i,j} &= \phi(x_i, y_j) \\ \psi_{i,j} &= \psi(x_i, y_j) \end{aligned}$$

où l'on voit que le choix d'indexation est implicite dans le nom des champs, et fonction de la sous-grille sur laquelle chacun est positionné. Chaque champ suivra la convention d'indexation correspondant à la sous-grille sur laquelle il prend ses valeurs. Ainsi, les termes source $\mathbf{f} = (f^x, f^y)$, localisés sur les ensembles $\mathcal{M}_u, \mathcal{M}_v$, seront indexés comme u et v (resp.).

Nous noterons $\delta^\pm = (\delta_x^\pm, \delta_y^\pm)$ les gradients retardés $(-)$ et avancés $(+)$:

$$\begin{aligned} \delta_x^+ A_{i,j} &= \frac{A_{i+1,j} - A_{i,j}}{\Delta x} \quad , \quad \delta_x^- A_{i,j} = \frac{A_{i,j} - A_{i-1,j}}{\Delta x} \\ \delta_y^+ A_{i,j} &= \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j}}{\Delta y} \quad , \quad \delta_y^- A_{i,j} = \frac{A_{i,j} - A_{i,j-1}}{\Delta y} \end{aligned}$$

Les dérivées secondes centrées notées $\delta^2 = (\delta_x^2, \delta_y^2)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \delta_x^2 A_{i,j} &= \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{\Delta x^2} = \delta_x^- (\delta_x^+ A_{i,j}) \\ \delta_y^2 A_{i,j} &= \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{\Delta y^2} = \delta_y^- (\delta_y^+ A_{i,j}) \end{aligned}$$

et le laplacien $\Delta_h = \delta_x^2 + \delta_y^2$.

On voit ainsi que le calcul du gradient de pression fera usage de formules retardées. En effet :

$$\begin{aligned} (\delta_x p)_{i,j} &= \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} = [\delta_x^- p]_{i,j} \\ (\delta_y^- p)_{i,j} &= \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} = [\delta_y^- p]_{i,j} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Le gradient discrétisé est ainsi défini comme $\nabla_h = (\delta_x^-, \delta_y^-)$.

Par contre, les gradients u_x et v_y du champ de vitesse, font apparaître des gradients

avancés :

$$\begin{aligned}(\delta_x u)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} = (\delta_x^+ u)_{i,j} \\ (\delta_y v)_{i,j} &= \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} = (\delta_y^+ v)_{i,j}\end{aligned}\quad (3.3)$$

ce qui conduit à l'expression suivante pour la divergence :

$$(\nabla_h \cdot \mathbf{u})_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y} = (\delta_x^+ u + \delta_y^+ v)_{i,j} \quad . \quad (3.4)$$

alors que :

$$\begin{aligned}(\delta_y u)_{i,j} &= \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} = (\delta_y^- u)_{i,j} \\ (\delta_x v)_{i,j} &= \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} = (\delta_x^- v)_{i,j}\end{aligned}\quad (3.5)$$

ce qui conduit à :

$$(\nabla_h \times \mathbf{u})_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} \quad . \quad (3.6)$$

Pour calculer les composantes du champ de vitesse à partir de ψ , nous utiliserons :

$$\begin{aligned}\delta_x^+ \psi_{i,j} &= \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{\Delta x} \\ \delta_y^+ \psi_{i,j} &= \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{\Delta y}\end{aligned}\quad (3.7)$$

Bien sûr, le laplacien en différences centrées s'écrira toujours sous la forme :

$$\Delta_h \phi_{i,j} \equiv \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \quad (3.8)$$

cette expression étant valable pour tous les champs qui interviennent dans le problème, quelle que soit la sous-grille sur laquelle ils sont disposés.

3.2 Méthodes de validation numérique

3.2.1 Le test de Guermond et Shen

Il est tentant, quand on met en œuvre un algorithme de résolution directe des équations hydrodynamiques de chercher une situation d'écoulement relativement simple afin d'en tester l'implémentation. Cependant, il n'y a aucune situation d'écoulement qui soit suffisamment complexe pour tester un algorithme de façon convaincante tout en possédant une solution exacte. Afin de pallier cette difficulté, nous utiliserons un

test inspiré des travaux de Guermond et Shen [29]. L'idée est de partir d'une solution, en prescrivant d'abord des champs de pression et de vitesse fonction du temps $(\mathbf{u}(t), p(t))$. Les termes sources qui génèrent cet écoulement sont alors calculés en inversant le problème de Stokes (2.1) :

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{u}_t - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p \quad (3.9)$$

Le test que nous utilisons est une version légèrement altérée de celui proposé par Guermond et Shen dans [29] (voir note en fin de section). Nous prenons pour solution du problème de Stokes le triplet (u, v, p) tel que

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \pi \sin(t) \sin(2\pi y) \sin^2(\pi x) \\ v(x, y, t) &= -\pi \sin(t) \sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \\ p(x, y, t) &= 4\pi^2 \sin(t) \cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{aligned} \quad (3.10)$$

On détermine ainsi le terme source

$$\begin{aligned} f^x &= \rho \pi \cos(t) \sin(2\pi y) \sin^2(\pi x) \\ &\quad - 4\pi^3 \sin(t) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\ &\quad - 2\mu \pi^3 \sin(t) \sin(2\pi y) (4\cos^2(\pi x) - 3) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} f^y &= -\rho \pi \cos(t) \sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \\ &\quad + 4\pi^3 \sin(t) \cos(\pi x) \cos(\pi y) \\ &\quad + 2\mu \pi^3 \sin(t) \sin(2\pi x) (4\cos^2(\pi y) - 3) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dans la méthode $\phi-\psi$, nous ne travaillons pas directement avec les variables (u, v, p) , mais avec la fonction de courant ψ

$$\psi(x, y, t) = \sin(t) \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) + c(x, y, t) \quad (3.13)$$

et la fonction associée ϕ

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) &= 2\pi^2 \sin(t) (\cos(2\pi x) \sin^2(\pi y) + \cos(2\pi y) \sin^2(\pi x)) \\ &\quad - \cos(t) \sin(2\pi y) \sin^2(\pi x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Par ailleurs, ce problème sera résolu dans un domaine carré décalé $\Omega = [0.4, 2.4]^2$

afin d'éviter des simplifications dues à l'annulation des dérivées d'ordre supérieur aux points de valeurs entières, qui perturbent la validation du code. Enfin, nous utiliserons les valeurs adimensionnées $\mu = \rho = 1$ pour les constantes du problème.

Remarque : dans un premier temps, nous avons utilisé le cas test proposé par Guermond et Al. [29]. Cela nous a posé des problèmes pour plusieurs raisons : (1) Guermond et Al. se placent dans un domaine carré borné de dimension $[-1, 1]^2$ les solutions exactes (3.10) ainsi que certaines de leurs dérivées s'annulent sur les bords ce qui ne permet pas d'évaluer précisément leurs erreurs aux bords à tous les ordres, (2) Guermond et Al. utilisent un préfacteur = 1 pour la pression (3.10). p , à travers la relation $\nabla p = \nabla^\perp \phi + \mathbf{f}$, apparaît donc comme une différence d'ordre 1 de deux quantités d'ordre $4\pi^3$, ce qui ne permet pas de bien séparer les erreurs d'ordres différents. Nous utilisons donc le facteur $4\pi^2$.

3.2.2 Normes

Normes spatiales :

Etant donnée le volume fluide V défini sur Ω , nous définissons les normes usuelles :

$$\|\varepsilon(x, y)\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\varepsilon(x, y)|^p \, dx \, dy \right)^{1/p} \text{ pour } 1 \leq p \leq N$$

et

$$\|\varepsilon(x, y)\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{(x, y) \in \Omega} |\varepsilon(x, y)|$$

Nous définissons également la norme H^1 :

$$\|\varepsilon(x, y)\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (|\varepsilon(x, y)|^2 + |\nabla \varepsilon(x, y)|^2) \, dx \, dy \right)^{1/2}$$

soit :

$$\|\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.15)$$

Nous avons besoin d'utiliser les normes induites sur les champs discrets en fonction de leurs domaines respectifs. Ainsi pour tout champ scalaire $\phi \in \mathbb{R}^{\Omega_\phi}$, on définit la norme $L^2(\Omega_\phi)$

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega_\phi)} = \left(\frac{1}{\text{card}(\Omega_\phi)} \sum_{(x_i, y_j) \in \Omega_\phi} |\phi_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$$

ainsi que la norme L^∞ :

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega_\phi)} = \max_{(x_i, y_j) \in \Omega_\phi} |\phi_{i,j}|$$

Nous définissons également la norme L^2 d'un champ vectoriel par exemple le gradient scalaire $\delta\phi : (\delta_x\phi, \delta_y\phi) \in \mathbb{R}^{\Omega_v} \times \mathbb{R}^{\Omega_u}$

$$\|\delta\phi\|_{L^2(\Omega_v \cup \Omega_u)}^2 = \|\delta_x\phi\|_{L^2(\Omega_v)}^2 + \|\delta_y\phi\|_{L^2(\Omega_u)}^2$$

Pour définir la norme H^1 nous utiliserons (3.15), pour écrire :

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega_\phi)}^2 = \|\phi\|_{L^2(\Omega_\phi)}^2 + \|\delta\phi\|_{L^2(\Omega_v \cup \Omega_u)}^2$$

Pour les champs vectoriels par exemple le champ de vitesse $\mathbf{u} = (u, v) \in \mathbb{R}^{\Omega_u} \times \mathbb{R}^{\Omega_v}$, nous séparons la norme de chaque de composante scalaire. Ainsi la norme L^2 de $u \in \mathbb{R}^{\Omega_u}$ s'écrit :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_u)} = \left(\frac{1}{\text{card}(\Omega_u)} \sum_{(x_i, y_j) \in \Omega_u} |u_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$$

la norme L^∞ sur Ω_u :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_u)} = \max_{(x_i, y_j) \in \Omega_u} |u_{i,j}|$$

et la norme H^1 fait intervenir un gradient δu à valeurs dans $\Omega_p \cup \Omega_\phi$ pour donner $\|\delta u\|_{L^2(\Omega_p \cup \Omega_\phi)}^2 = \|\delta_x u\|_{L^2(\Omega_p)}^2 + \|\delta_y u\|_{L^2(\Omega_\phi)}^2$ pour donner :

$$\|u\|_{H^1(\Omega_\phi)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega_u)}^2 + \|\delta u\|_{L^2(\Omega_p \cup \Omega_\phi)}^2$$

Nous faisons de même pour $v \in \mathbb{R}^{\Omega_v}$.

Normes temporelles :

Enfin nous définissons une norme temporelle pour chacune des normes définies précédemment en intégrant en temps, par exemple pour le champ ϕ :

$$\|\phi_{\delta t}\|_{l^2(E)} = \left(\delta t \sum_{ts=0}^{Tmax} \|\phi^{ts}\|_E^2 \right)^{1/2} \quad (3.16)$$

avec $E = L^2(\Omega_\phi)$, $L^\infty(\Omega_\phi)$ et $H^1(\Omega_\phi)$

Problèmes de Poisson

Sommaire

4.1	Poisson-Dirichlet en présence de bords irréguliers	58
4.1.1	Discrétisation du laplacien près de bords irréguliers	60
4.1.2	Analyse d'erreur	63
4.1.3	Validation numérique	65
4.2	Traitement des conditions de bord	66
4.2.1	Extrapolation de $\Delta\psi$ sur un bord régulier	67
4.2.2	Extrapolation de $\Delta\psi$ près d'interfaces irrégulières	73
4.3	Poisson-Neumann avec bord régulier	78
4.3.1	Validation numérique	81
4.4	Conclusions	84

La méthode que nous avons décrite au Chapitre 2 fait intervenir plusieurs problèmes elliptiques : d'abord plusieurs problèmes de Poisson \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_α qui doivent être résolus afin de calculer la fonction scalaire ϕ , qui apparaît explicitement dans l'équation d'évolution pour la fonction de courant. Par exemple, le problème \mathcal{S}_0 (équation 2.19) se présente sous la forme (rappelons que nous travaillons désormais en variables adimensionnées $\mu = \rho = 1$) :

$$\begin{cases} \Delta\phi &= \nabla \times \mathbf{f} & \text{sur } \Omega \\ \phi &= \Delta\psi - \psi_t & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

Mais un autre problème intervient aussi si l'on cherche à accéder à la pression, celle-ci étant liée à ϕ à travers l'équation (2.12) :

$$\nabla p = \nabla^\perp \phi + \mathbf{f} \quad , \quad (4.2)$$

La discrétisation d'un problème tel que (4.1) fait apparaître plusieurs types de difficultés : d'abord, évidemment l'écriture de l'opérateur Δ agissant sur ϕ , en particulier près de bords irréguliers ; mais aussi celle de l'opérateur Δ agissant sur ψ , et enfin, l'extrapolation de l'équation $\phi = \Delta\psi - \psi_t$ jusqu'au bord du domaine.

Afin de préciser comment ces difficultés interviennent dans (4.1), nous introduisons le problème de Poisson suivant :

$$(\mathcal{D}_0) \begin{cases} \Delta\phi &= \nabla \times \mathbf{f} & \text{sur } \Omega \\ \phi &= \phi_b & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.3)$$

Pour $\phi_b \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, la solution de ce problème sera notée $\mathcal{D}_0^{-1}(\phi_b)$. Nous commencerons par étudier les méthodes numériques permettant de résoudre (4.3), tout particulièrement dans le cas où le bord est irrégulier. C'est une question apparemment simple, mais son traitement en différences finies a reçu beaucoup d'attention tout récemment [23, 38]. Ensuite, nous étudierons les méthodes qui permettent d'estimer la fonction ϕ_b à partir d'une représentation de ψ sur $\overline{\Omega}_\phi$.

4.1 Poisson-Dirichlet en présence de bords irréguliers

Sous forme discrétisée, une solution du problème (4.3) sera cherchée dans \mathbb{R}^{Ω_ϕ} . Le domaine $\Omega_\phi = \mathcal{M} \cap \mathring{\Omega}$, a été défini section 3.1.2. Il exclut les points de la grille \mathcal{M} qui sont sur le bord de Ω .

La figure 4.1 illustre les différentes situations rencontrées dans l'évaluation d'un laplacien discret $\Delta_h \phi$, pour $\phi \in \mathbb{R}^{\Omega_\phi}$. Les cas simples sont les cas 1 et 2 (\bullet), pour lesquels l'usage du stencil à 5 points standard est possible : en ces points, on écrira $\Delta_h \phi = \delta^2 \phi$, avec δ l'opérateur de différences centrées classique défini section 3.1.3. C'est évidemment une approximation d'ordre 2. Le cas 2 fait bien sûr intervenir une valeur au bord, hors de Ω_ϕ , mais qui sera fournie par la condition de Dirichlet. Dans le cas 3, par contre, l'utilisation de ce stencil ne sera plus possible parce qu'il ferait intervenir des points qui sont hors de $\bar{\Omega}_\phi$.

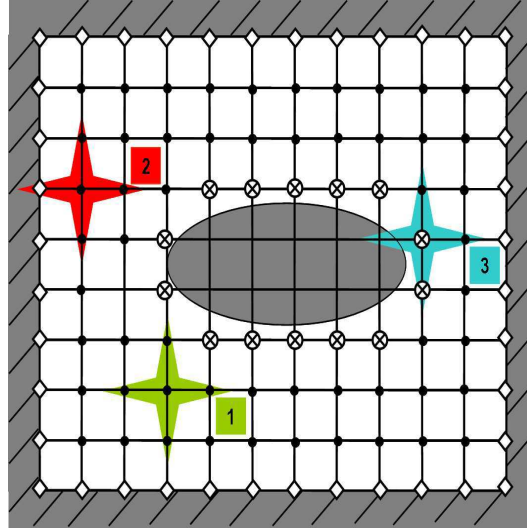


FIG. 4.1 – Exemple de la représentation du domaine de définition du champ ϕ et de son laplacien. Dans le cas n°1, tous les points du stencil se situe dans le domaine fluide. Le cas n°2 correspond au cas où le stencil de l'opérateur Laplacien est proche d'une interface régulière. Dans le cas n°3, le stencil, dont le point-centre est représenté par les symboles \otimes , est situé près d'une interface irrégulière.

Afin de préciser comment le problème discret s'exprime sous forme matricielle, supposons un instant que tous les bords du domaine d'intégration soient réguliers. C'est par exemple le cas d'une cellule de simulation rectangulaire, sans inclusion. Aux points qui sont éloignés du bord (cas 1, figure 4.1), le problème de Poisson s'écrit classiquement :

$$\frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = (\nabla \times f)_{i,j} \quad (4.4)$$

où l'on utilise la notation : $\phi_{i,j} = \phi(x_i, y_j)$, $\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2$. Cette expression définit

les éléments d'une matrice pentadiagonale.

Les points près du bord (cas 2 de la figure) font intervenir les valeurs définies par la condition de Dirichlet. Dans la situation illustrée, en notant la valeur au bord $\phi_{i-1,j} = \phi_L$, on écrit :

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\phi_{i,j}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) = (\nabla \times f)_{i,j} + \frac{\phi_L}{\Delta x^2} \quad (4.5)$$

Nous noterons $\partial\Omega_\phi$ l'ensemble des points où la condition de Dirichlet intervient dans la formulation discrète du problème de Poisson. Le problème discret s'écrit alors sous la forme :

$$L\phi + B\phi_b = \nabla \times f$$

où L et B sont des matrices creuses, $\phi \in \mathbb{R}^{\Omega_\phi}$. On a noté : $\nabla \times f = (\nabla \times f)(\Omega_\phi) \in \mathbb{R}^{\Omega_\phi}$, et $\phi_b = \phi_b(\partial\Omega_\phi) \in \mathbb{R}^{\partial\Omega_\phi}$.

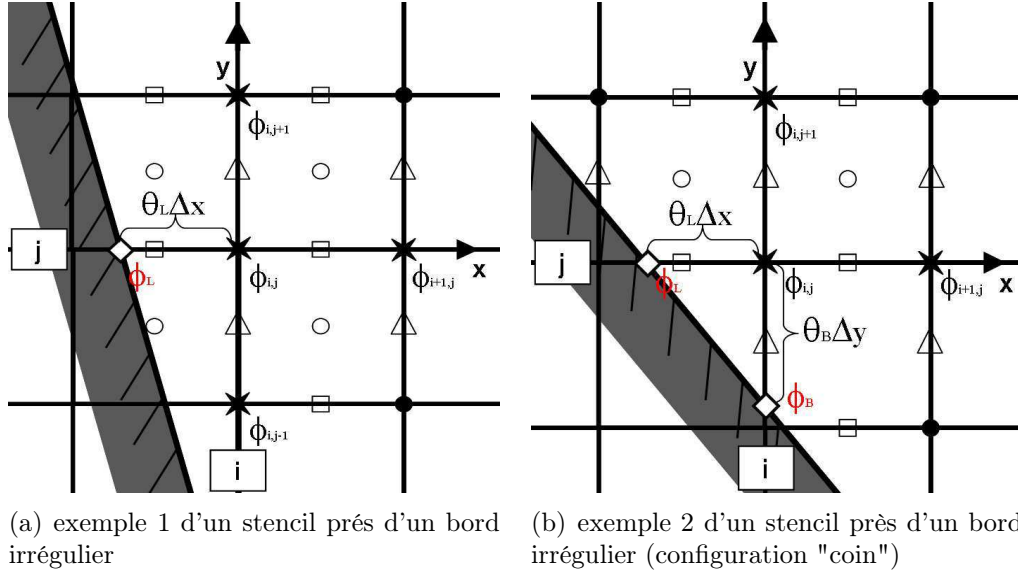
Ici, le bord étant régulier, $\partial\Omega_\phi$ est un sous-ensemble de $\overline{\Omega}_\phi$ (les valeurs aux coins n'étant pas utilisées). Nous allons voir incessamment que quand le domaine est irrégulier, nous devons utiliser des valeurs de la fonction ϕ_b en des points qui ne sont pas des éléments de \mathcal{M} .

4.1.1 Discrétisation du laplacien près de bords irréguliers

Près d'un bord irrégulier, la situation est plus délicate à traiter, les points où la condition aux limites est connue n'étant pas des points de grille. On est cependant libre d'utiliser les valeurs de ϕ_b sur tout le contour, ce qui laisse une assez grande flexibilité. Dans le cas représenté figure 4.2a, on choisira d'utiliser le point (x_L, y_j) où le contour coupe le segment $[(x_{i-1}, y_j), (x_i, y_j)]$. Plus généralement, on utilisera les intersections des segments de grille impliqués dans le stencil à 5 points avec l'interface. L'ensemble noté $\partial\Omega_\phi$, en plus des points réguliers discuté précédemment inclura donc toutes les intersections de contours irréguliers avec les segments de grille. Bien sûr $\partial\Omega_\phi \subset \partial\Omega$.

Selon les cas, on notera x_L, x_R, x_T ou x_B ces points supplémentaires, les indices L, T, B, R (Left, Top, Bottom, Right) indiquant leur position par rapport à l'origine du stencil. On note :

$$\begin{cases} x_L = x_{i,j} - \theta_L \Delta x \\ x_R = x_{i,j} + \theta_R \Delta x \\ y_T = y_{i,j} - \theta_T \Delta y \\ y_B = y_{i,j} + \theta_B \Delta y \end{cases} \quad (4.6)$$

FIG. 4.2 – Configuration des points du champ ϕ formant le terme $\Delta\phi$ sur une grille MAC

Notons qu'en pratique, les quantités $0 \leq \theta_L, \theta_R, \theta_T, \theta_B \leq 1$ seront évaluées en utilisant un champ de levelset [44].

Pour construire le laplacien discret près d'un bord irrégulier, partant de l'expression continue $\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy}$, on traite indépendamment les dérivées secondes en x et y . Pour la mise en œuvre de ces schémas, nous nous inspirons de Jomaa et al. [38] et Gibou et al. [23], qui ont étudié plusieurs traitements des dérivées secondes au bord.

On peut en effet écrire, en utilisant une extrapolation linéaire du point fictif $\phi_{i,j-1}$ [23] :

$$\phi_{xx} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\phi_{i,j} - \phi_L}{\theta_L \Delta x} \right) + \varepsilon_b^{lin} \quad (4.7)$$

avec $\varepsilon_b^{lin} = O(\Delta x^0)$. Le premier terme du membre de droite est identifié comme étant $\delta_x^2 \phi$, ce qui mène par exemple, dans le cas illustré figure 4.2a à écrire :

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\phi_{i,j}}{\theta_L \Delta x} \right) + \left(\frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) = (\nabla \times f)_{i,j} + \frac{\phi_L}{\theta_L \Delta x^2} - \varepsilon_b^{lin} \quad (4.8)$$

le terme de gauche définissant plusieurs coefficients de la matrice L et le dernier terme de droite, un élément de la matrice B de valeur $1/\theta_L \Delta x^2$. Nous reviendrons plus loin sur le traitement des divergences apparentes liées à la présence des θ_L .

Notons ici que les deux derniers termes peuvent être encore réorganisés sous la forme :

$$\frac{\phi_L}{\theta_L \Delta x^2} - \varepsilon_b^{lin} = \frac{\phi_L - \theta_L \Delta x^2 \varepsilon_b^{lin}}{\theta_L \Delta x^2} \quad (4.9)$$

L'erreur d'ordre 0 commise dans l'évaluation de la dérivée seconde (4.7) correspond donc à une erreur d'ordre 2 sur la condition de Dirichlet, ici ϕ_L . C'est la raison pour laquelle, comme l'indiquent Jomaa et al. [38] et encore Gibou et al. [23], cette formulation suffira à obtenir une solution à l'ordre 2. La convergence du problème ainsi formulé sera étudiée plus en détail section 4.1.2.

Un traitement à l'ordre suivant (en utilisant une extrapolation quadratique pour $\phi_{i,j-1}$) s'écrit :

$$\phi_{xx} = 2 \left(\frac{\phi_L + \theta_L \phi_{i+1,j} - (1 + \theta_L) \phi_{i,j}}{\theta_L (\theta_L + 1) \Delta x^2} \right) + O(\Delta x) \quad (4.10)$$

l'erreur commise sur le bord étant $\varepsilon_b^{quad} = O(\Delta x)$. Il a l'avantage, encore, de ne faire intervenir que les points du stencil usuel, alors que les traitements d'ordre supérieur, feraient intervenir des points supplémentaires. Cela conduit à des éléments de matrice de la forme :

$$\frac{2\phi_{i+1,j}}{(\theta_L + 1) \Delta x^2} - \frac{2\phi_{i,j}}{\theta_L \Delta x^2} + \left(\frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) = (\nabla \times f)_{i,j} - \frac{2\phi_L}{\theta_L (\theta_L + 1) \Delta x^2} - \varepsilon_b^{quad} \quad (4.11)$$

La matrice L est donc encore pentadiagonale. Là encore, la même réorganisation des derniers termes est possible et montre que l'erreur ε_b^{quad} commise dans la discrétisation du laplacien correspond à une erreur d'ordre $\Delta x^2 \varepsilon_b^{quad}$ sur ϕ_L .

Pour ces deux traitements des conditions de bord, on montre que la convergence des schémas est d'ordre 2 [23, 38]. Cependant, des divergences de points de vue existent quant au choix le plus approprié de la méthode à utiliser. En effet, Gibou et al [23] préconisent l'utilisation du traitement linéaire, puisque la matrice obtenue (équation (4.8)) est symétrique, ce qui permet d'utiliser des méthodes de résolution rapide (gradient conjugué préconditionné). Jomaa et al [38], cependant, indiquent que l'utilisation de l'expression quadratique permet de mieux contrôler les erreurs au bord, en particulier aux points de type "coin", c'est à dire ceux dont le stencil coupe l'interface en deux endroits, comme dans le cas de droite sur la figure 4.2b. Dans notre implémentation, nous utiliserons toujours un traitement quadratique, et nous aurons recours à des méthodes de gradient bi-conjugué stabilisé.

Par ailleurs, notons que dans les expressions (4.8) et (4.11) la variable θ apparaît

au dénominateur, ce qui peut être source de défauts de convergence numérique si l'interface se trouve trop près d'un point de grille, parce que les matrices L et B sont mal conditionnées. Pour cette raison nous avons mis en place une méthode de changement de variable.

Dans le cas d'un stencil (voir figure (4.2)) où une seule des dérivées fait apparaître le développement (4.11) ou (4.8), on multiplie l'équation (4.11) par θ_L pour obtenir :

$$\frac{2\theta_L\phi_{i+1,j}}{(1+\theta_L)\Delta x^2} - \frac{2\phi_{i,j}}{\Delta x^2} + \theta_L \left(\frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) = \theta_L(\nabla \times f)_{i,j} - \frac{2\phi_L}{(\theta_L + 1)\Delta x^2} \quad (4.12)$$

Dans le cas où le stencil est coupé sur ses deux axes (voir un exemple sur la figure 4.2b), plusieurs choix de changement de variable sont possibles. Nous en avons essayé plusieurs qui s'avèrent équivalents nous utiliserons $\theta = \frac{\theta_L\theta_B}{\theta_L + \theta_B}$:

$$\begin{aligned} \frac{2\theta}{(\theta_L + 1)\Delta x^2}\phi_{i+1,j} + \frac{2\theta}{(\theta_B + 1)\Delta y^2}\phi_{i,j+1} - \left(\frac{\theta_B}{\Delta x^2} + \frac{\theta_L}{\Delta y^2} \right) \frac{2\phi_{i,j}}{\theta_L + \theta_B} = \\ \theta(\nabla \times f)_{i,j} - \frac{2}{(\theta_L + \theta_B)} \left(\frac{\theta_B\phi_L}{\Delta x^2} + \frac{\theta_L\phi_B}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.1.2 Analyse d'erreur

Dans sa forme discrétisée, le problème de Poisson Dirichlet se présente sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta_h \phi^n = \nabla \times \mathbf{f} & \text{sur } \Omega_\phi \\ \phi^n = \phi_b & \text{sur } \partial\Omega_\phi \end{cases} \quad (4.14)$$

Nous avons introduit la notation ϕ^n pour le champ discret solution pour le distinguer du champ ϕ solution du problème continu. Remarquons que ϕ^n est ainsi défini sur $\partial\Omega_\phi \cup \Omega_\phi$. Nous noterons aussi :

$$\hat{\phi}_{i,j}^n = \phi_{i,j}^n - \phi(x_i, y_j) \quad \forall (x_i, y_j) \in \Omega_\phi \quad (4.15)$$

l'erreur sur la solution du problème discret. Il est facile de montrer que $\widehat{\phi}^n$ est solution d'un problème de Poisson discret. En effet,

$$\begin{aligned}\Delta_h \widehat{\phi}_{i,j}^n &= \Delta_h \phi_{i,j}^n - \Delta_h \phi(x_i, y_j) \\ &= \nabla \times \mathbf{f} - \Delta_h \phi(x_i, y_j) \\ &= \Delta \phi(x_i, y_j) - \Delta_h \phi(x_i, y_j) \\ &\equiv \varepsilon_{i,j}^\Delta\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases} \Delta_h \widehat{\phi}^n &= \varepsilon^\Delta & \text{sur } \Omega_\phi \\ \widehat{\phi}^n &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_\phi \end{cases} \quad (4.16)$$

Sous cette forme, il n'est pas immédiat que $\widehat{\phi}^n$ soit d'ordre 2, ε^Δ comprenant des termes d'ordre $O(1)$ au bord.

Jomaa et al. [38] expliquent la convergence d'ordre 2 en calculant la solution d'un problème 1D. Le reste de leur argument est basé sur des résultats numériques. Dans leurs notations, pour le cas du traitement linéaire du laplacien au bord, l'intégration du problème 1D donnerait :

$$\widehat{\phi}_i = \Delta x^2 \left(\left(\frac{\theta_L + i - 1}{N + \theta_L + \theta_R} - 1 \right) \sum_{j=1}^{N-1} (j - 1 + \theta_L) \varepsilon_j^\Delta - \sum_{j=i+1}^{N-1} (i - j) \varepsilon_j^\Delta \right) \quad (4.17)$$

On voit en effet que l'erreur de troncature du laplacien, ε^Δ est multipliée par Δx^2 ainsi même si $\varepsilon^\Delta = O(1)$ sur les bords l'erreur reste d'ordre 2 (voir calcul Annexe III).

Nous présentons ici un argument plus général. En effet, il suffit de remarquer comme nous l'avons anticipé dans la discussion de l'expression (4.9), que le problème est équivalent à un autre problème de Poisson :

$$\begin{cases} \Delta_h \widehat{\phi}^n &= \varepsilon' & \text{sur } \Omega_\phi \\ \widehat{\phi}^n &= \varepsilon_b & \text{sur } \partial\Omega_\phi \end{cases} \quad (4.18)$$

où ε_b et ε' vérifient : $B\varepsilon_b + \varepsilon' = \varepsilon^\Delta$. Comme ces deux champs sont d'ordre 2, $\widehat{\phi}$ est la solution discrète d'un problème de Poisson continu ne faisant intervenir que des sources d'ordre $O(\Delta x^2)$.

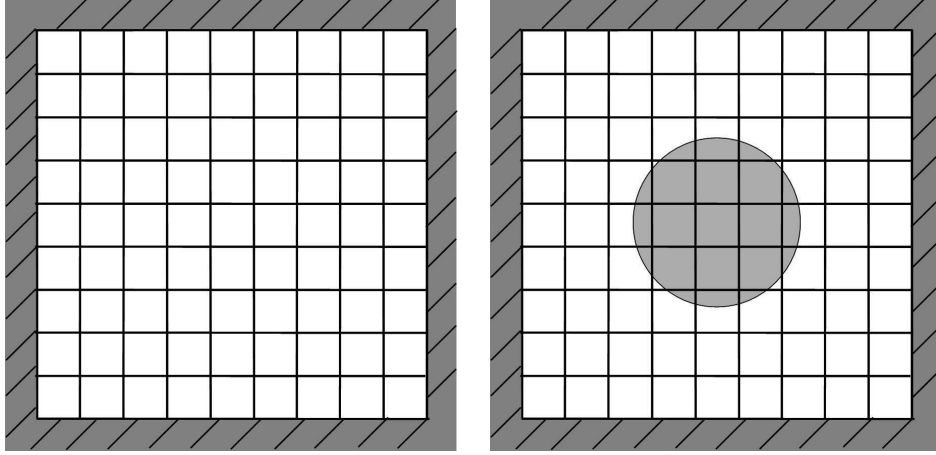


FIG. 4.3 – Géométries des tests proposés : à gauche, domaine carré de dimension 2×2 avec des bords réguliers ; à droite, domaine carré de dimension 2×2 avec un disque de rayon $1/6$.

4.1.3 Validation numérique

Pour valider nos solveurs de Poisson, nous utilisons la solution du problème test décrit en section 3.2.1, au temps $t = 1$. L'expression du champ ϕ est alors :

$$\begin{aligned} \phi^{\text{gs}}(x, y) &= 2\pi^2 \sin(1) (\cos(2\pi x) \sin^2(\pi y) + \cos(2\pi y) \sin^2(\pi x)) \\ &\quad - \cos(1) \sin(2\pi y) \sin^2(\pi x) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Le problème \mathcal{D}_0 (equation 4.3) s'écrit en utilisant ϕ^{gs} elle-même pour la condition de Dirichlet, $\phi_b = \phi^{\text{gs}}$, et en utilisant les expressions définies par les équations (3.11) et (3.12) à $t = 1$ pour le terme source.

Afin de tester nos implémentations près de bords régulier et irréguliers, nous utilisons les domaines test suivants (voir figure 4.3) :

- Un domaine carré $\Omega = [0.4, 2.4]^2$, de dimensions $L_x = L_y = 2$ (figure 4.3a)
 - Le même domaine avec en son centre une particule de rayon $r = 1/6$ (figure 4.3b).
- Le pas d'espace est $\Delta x = L_x/N_x$ et $\Delta y = L_y/N_y$, pour plusieurs résolutions $N_x \times N_y$ avec $N_x = N_y = 20, 40, 80, 160, 320, 640$.

Les matrices avec lesquelles nous travaillons sont creuses et nous permettent d'utiliser un stockage par bande. Elles ne sont pas symétriques, et pour les inverser, nous avons recouru à un algorithme de gradient bi-conjugué stabilisé (BICGSTAB) pré-

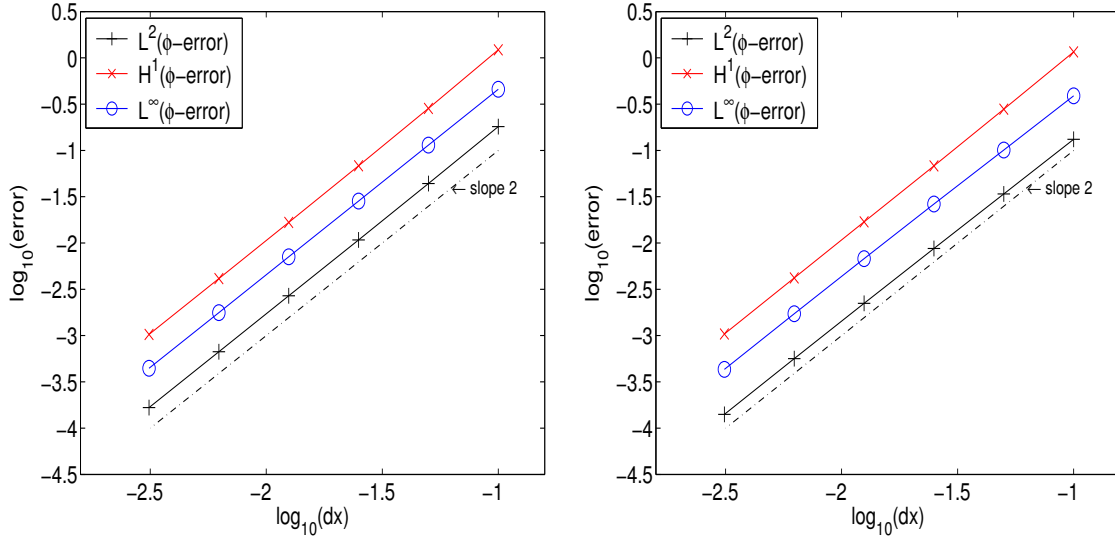


FIG. 4.4 – Courbes de convergence pour la solution du problème \mathcal{D}_0 pour le problème test de Guermond-Shen [29] : à gauche, résultats pour le domaine carré, sans inclusion ; à droite, avec inclusion.

conditionné par la factorisation incomplète de la matrice L (préconditionneur ILU). Ces algorithmes sont décrits en Annexe II.

Des courbes de convergence sont présentées figures 4.4 pour les deux cas présentés figures 4.3. Ils montrent que la convergence est effectivement d'ordre 2, et ce pour les normes $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{L^\infty}$ et $\|\cdot\|_{H^1}$.

4.2 Traitement des conditions de bord

À ce stade, nous disposons d'un solveur capable de traiter à l'ordre 2 un problème de Dirichlet avec des interfaces irrégulières comme expliqué précédemment.

Dans le problème (4.1) que nous souhaitons résoudre les valeurs aux bords du champ ϕ ne sont connues qu'à travers l'équation :

$$\phi = \Delta\psi - \psi_t \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad (4.20)$$

Du champ ψ nous connaissons à chaque instant les gradients et les valeurs au bord, donc en particulier nous connaissons ψ_t . La question est donc de construire une extrapolation du laplacien sur $\partial\Omega$, partant : (i) des valeurs au bord $\psi|_{\partial\Omega}$, (ii) des valeurs au bord de $\nabla\psi|_{\partial\Omega}$ et (iii) des valeurs discrète $\psi|_{\Omega_\phi}$. Nous noterons $\phi_b(\psi, \nabla\psi, \psi_t)$ cette extrapolation. Pour chaque extrapolation ainsi définie, la question est de savoir quelle est la précision obtenue sur $\mathcal{D}_0^{-1}(\phi_b(\psi, \nabla\psi, \psi_t))$. Bien sûr nous n'avons besoin

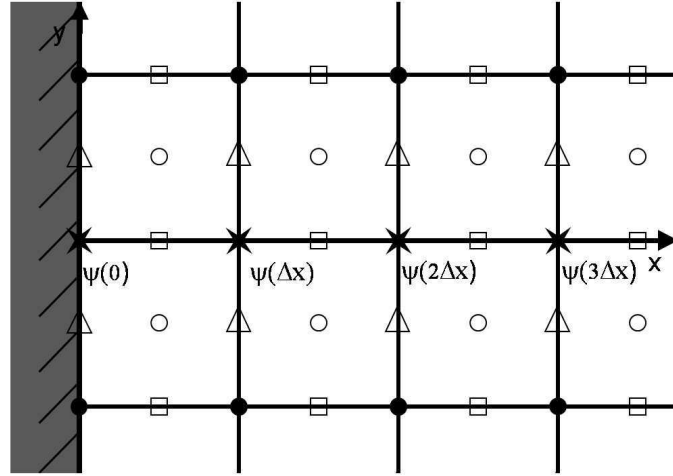


FIG. 4.5 – Position du champ ψ près d'un bord régulier sur la grille MAC. L'origine des x est localisé sur la paroi

de définir cette extrapolation que sur $\partial\Omega_\phi$.

Nous disposons de beaucoup d'information sur ψ au bord, ce qui permet d'imaginer de nombreuses formes d'extrapolations. Leurs conséquences en termes de convergence dans la résolution du problème de Poisson, mais aussi, comme nous le verrons ultérieurement en terme de convergence de l'implémentation de la méthode ϕ - ψ ne sont pas toujours très intuitives. En fait, au cours de notre démarche, c'est en testant de nombreuses extrapolants et en les étudiant systématiquement que nous sommes parvenus à rationaliser leurs propriétés. Nous résumons ici nos résultats.

Notons que déjà sur un bord régulier, l'estimation d'un laplacien n'est pas tout à fait évidente, puisque nous ne pouvons utiliser le stencil à 5 points. Nous commencerons donc par traiter ce cas.

4.2.1 Extrapolation de $\Delta\psi$ sur un bord régulier

Comme auparavant, nous décomposons le laplacien en ses dérivées cartésiennes, $\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$. Puisque la fonction $\psi|_{\partial\Omega}$ est connue, une des dérivées secondes est accessible analytiquement. Dans le cas représenté figure 4.5, nous disposons d'expressions analytiques pour ψ^0 , pour toutes ses dérivées en y , et pour ψ_x^0 . Reste à calculer ψ_{xx}^0 .

Pour tester nos différents extrapolants, nous utiliserons le test discuté dans la section 4.1.3 dans le cas d'un domaine carré, en prenant pour valeur de ψ la solution

analytique (3.13) correspondante, issue du problème de Guermond et Shen à l'instant $t = 1$ et la constante c est connue. Nous allons donc construire un extrapolant $\phi_b(\psi^{\text{gs}}, \nabla \psi^{\text{gs}}, \psi_t^{\text{gs}})$ et chercher la solution $\mathcal{D}_0^{-1}(\phi_b(\psi^{\text{gs}}, \nabla \psi^{\text{gs}}, \psi_t^{\text{gs}}))$ que nous comparerons avec ϕ^{gs} . Tout au long de notre présentation, nous ferons référence à des résultats de convergence en normes L^2 , L^∞ et H^1 qui sont présentés sur quelques figures 4.7 à la fin de la discussion.

4.2.1.1 Développement limité du champ ψ à l'ordre 1 :

Un développement limité de ψ en prenant l'interface comme origine des x s'écrit à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \psi(\Delta x) &= \psi^0 + \Delta x \psi_x^0 + \frac{\Delta x^2}{2} \psi_{xx}^0 + O(\Delta x^3) \\ \Rightarrow \psi_{xx}^0 &= \frac{2}{\Delta x^2} (\psi(\Delta x) - \psi^0 - \Delta x \psi_x^0) + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (4.21)$$

On voit qu'elle faite apparaître les valeurs de ψ et ψ_x au bord, on va noter cette expression **n=1 Neumann-Dirichlet**.

On peut écrire des approximations du même ordre qui font intervenir soit ψ^0 soit ψ_x^0 . Cela nécessite de faire intervenir un point supplémentaire. On écrit :

$$\begin{cases} \psi(\Delta x) = \psi^0 + \Delta x \psi_x^0 + \frac{\Delta x^2}{2} \psi_{xx}^0 + O(\Delta x^3) \\ \psi(2\Delta x) = \psi^0 + 2\Delta x \psi_x^0 + 2\Delta x^2 \psi_{xx}^0 + O(\Delta x^3) \end{cases}$$

En éliminant le terme ψ^0 nous obtenons à l'ordre 1 :

$$\psi_{xx}^0 = \frac{2}{3\Delta x^2} (\psi(2\Delta x) - \psi(\Delta x) - \Delta x \psi_x^0) + O(\Delta x) \quad (4.22)$$

on appellera cette expression **n=1 Neumann**.

En éliminant le terme ψ_x^0 on obtient une autre approximation d'ordre 1 :

$$\psi_{xx}^0 = \frac{1}{\Delta x^2} (\psi(2\Delta x) - 2\psi(\Delta x) + \psi^0) + O(\Delta x) \quad (4.23)$$

que l'on appellera **n=1 Dirichlet**.

Comme il apparaît figures 4.7, on obtient une convergence d'ordre $O(\Delta x)$ pour ces trois approximations avec une précision supérieure dans le cas **n=1 Neumann-Dirichlet**.

4.2.1.2 Développement limité du champ ψ à l'ordre 2 :

Nous écrivons :

$$\begin{cases} \psi(\Delta x) = \psi^0 + \Delta x \psi_x^0 + \frac{\Delta x^2}{2} \psi_{xx}^0 + \frac{\Delta x^3}{6} \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ \psi(2\Delta x) = \psi^0 + 2\Delta x \psi_x^0 + 2\Delta x^2 \psi_{xx}^0 + \frac{8}{6} \Delta x^3 \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \end{cases}$$

pour obtenir à l'ordre 2 :

$$\psi_{xx}^0 = \frac{1}{2\Delta x^2} (8\psi(\Delta x) - \psi(2\Delta x) - 7\psi^0 - 6\Delta x \psi_x^0) + O(\Delta x^2) \quad (4.24)$$

C'est une expression qui fait apparaître les valeurs de ψ et ψ_x au bord, on l'appellera **n=2 Neumann-Dirichlet**.

Comme nous l'avons vu précédemment, on peut également écrire des approximations de même ordre qui font intervenir soit ψ^0 soit ψ_x^0 . Ces approximations nécessitent l'utilisation d'un point supplémentaire. On écrit :

$$\begin{cases} \psi(\Delta x) = \psi^0 + \Delta x \psi_x^0 + \frac{1}{2} \Delta x^2 \psi_{xx}^0 + \frac{\Delta x^3}{6} \psi_{xxx}^0 + \frac{1}{24} \Delta x^4 \psi_{xxxx}^0 + O(\Delta x^5) \\ \psi(2\Delta x) = \psi^0 + 2\Delta x \psi_x^0 + 2\Delta x^2 \psi_{xx}^0 + \frac{8}{6} \Delta x^3 \psi_{xxx}^0 + \frac{16}{24} \Delta x^4 \psi_{xxxx}^0 + O(\Delta x^5) \\ \psi(3\Delta x) = \psi^0 + 3\Delta x \psi_x^0 + \frac{9}{2} \Delta x^2 \psi_{xx}^0 + \frac{27}{6} \Delta x^3 \psi_{xxx}^0 + \frac{81}{24} \Delta x^4 \psi_{xxxx}^0 + O(\Delta x^5) \end{cases}$$

En éliminant le terme ψ_x^0 , à l'ordre 2, on obtient l'expression :

$$\psi_{xx}^0 = \frac{1}{11\Delta x^2} (-19\psi(\Delta x) + 26\psi(2\Delta x) - 7\psi(3\Delta x) - 12\Delta x \psi_x^0) + O(\Delta x^2) \quad (4.25)$$

que l'on appellera **n=2 Neumann**.

En éliminant le terme ψ_x^0 , toujours à l'ordre 2 :

$$\psi_{xx}^0 = \frac{1}{\Delta x^2} (-5\psi(\Delta x) + 4\psi(2\Delta x) - \psi(3\Delta x) - 2\psi^0) + O(\Delta x^2) \quad (4.26)$$

On appellera cette expression **n=2 Dirichlet**.

Comme le montrent les résultats présentés figures 4.7, ces extrapolants permettent d'obtenir une convergence d'ordre $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$ pour ces trois approximations avec une précision nettement supérieure pour le cas **n=2 Neumann-Dirichlet**.

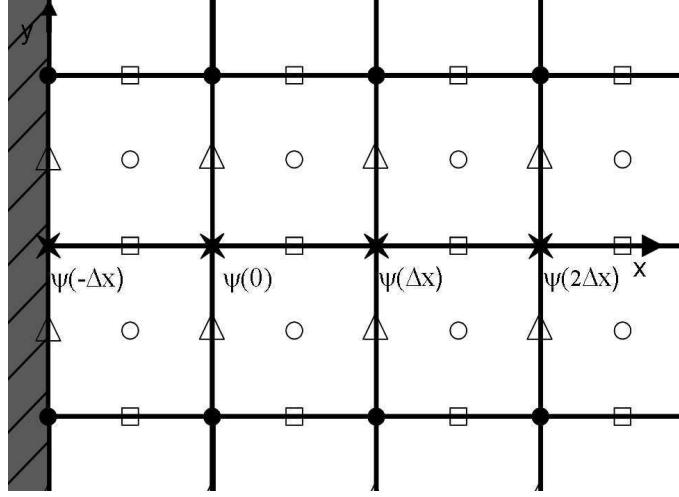


FIG. 4.6 – Position du champ ψ près d'un bord régulier sur la grille MAC. L'origine des x est localisé à un pas Δx de la paroi

4.2.1.3 Extrapolation linéaire de $\Delta\psi$:

Une autre façon d'évaluer $\Delta\psi$ au bord est d'utiliser une extrapolation à partir de ses valeurs connues sur Ω_ϕ . On s'appuiera sur une formule d'extrapolation linéaire : avec les conventions de la figure 4.5,

$$\Delta\psi(0) = 2\Delta\psi(\Delta x) - \Delta\psi(2\Delta x) + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (4.27)$$

Pour garantir que l'extrapolant de $\Delta\psi$ ainsi calculé soit d'ordre 2, il faut s'assurer que les termes qui composent la linéarisation soient également d'ordre 2. Le terme $\Delta\psi(2\Delta x)$ est connu par différence centrée, donc ne pose pas de problème. Le terme $\Delta\psi(\Delta x)$, s'il est calculé en utilisant la condition de Dirichlet sera aussi à l'ordre 2. Mais nous comme nous l'avons vu dans la présentation de la méthode ϕ - ψ , la condition de bord "naturelle" pour ψ est une condition de Neumann. Alors, il nous faudra utiliser d'autres expressions pour obtenir l'ordre 2. Nous étudions ces deux possibilités.

Pour effectuer ces développements limités, nous changeons d'origine en nous repérant sur la figure (4.6).

L'expression classique en différences centrées s'écrit évidemment :

$$\Rightarrow \psi_{xx}^0 = \frac{1}{\Delta x^2}(\psi(\Delta x) + \psi(-\Delta x) - 2\psi^0) + O(\Delta x^2) \quad (4.28)$$

Quand elle sert à calculer $\Delta\psi$ près du bord dans l'approximation (6.44), l'approximation sera dite **linéaire de type Dirichlet d'ordre n=2**.

On construit une approximation **linéaire de type Neumann d'ordre n=2** en utilisant la dérivée première $\psi_x(-\Delta x)$ (Condition de Neumann) dans l'écriture de ψ_{xx} (avec les conventions de la figure 4.6) :

$$\begin{cases} \psi(\Delta x) = \psi^0 + \Delta x \psi_x^0 + \frac{\Delta x^2}{2} \psi_{xx}^0 + \frac{\Delta x^3}{6} \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ \psi(2\Delta x) = \psi^0 + 2\Delta x \psi_x^0 + 2\Delta x^2 \psi_{xx}^0 + \frac{8}{6} \Delta x^3 \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ \psi_x(-\Delta x) = \psi_x^0 - \Delta x \psi_{xx}^0 + \frac{\Delta x^2}{2} \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi_{xx}^0 = \frac{1}{11\Delta x^2} (2\psi(\Delta x) + 2\psi(2\Delta x) + 6\Delta x \psi_x(-\Delta x) - 4\psi^0) + O(\Delta x^2) \quad (4.29)$$

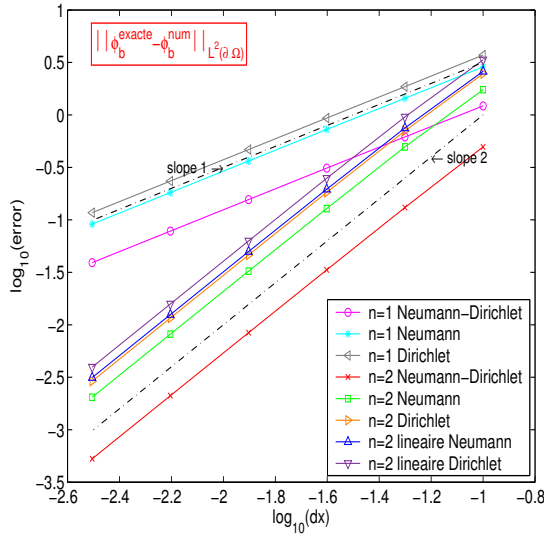
Comme le montrent les résultats présentés figures 4.7, ces extrapolants permettent d'obtenir une convergence d'ordre $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$. La précision est cependant relativement moins bonne qu'avec les développements limités décrits précédemment.

Il est possible d'effectuer des développements limités d'ordre supérieur mais cela n'a pas d'intérêt dans la mesure où notre laplacien est dominé par un ordre 2 dans tout le reste du domaine Ω . A titre d'exemple, on peut donner $n = 3$:

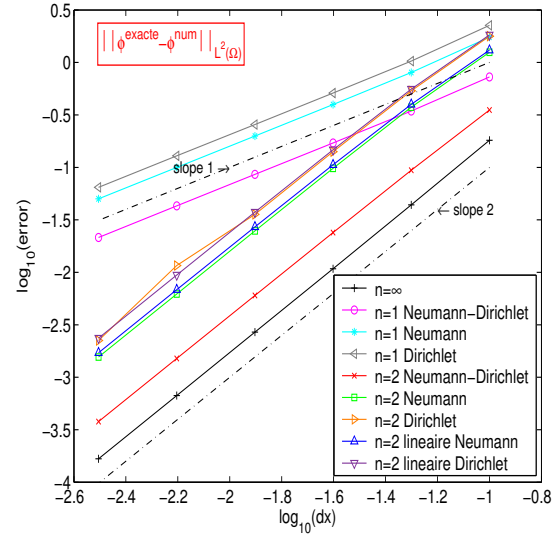
$$\begin{cases} \psi(\Delta x) = \psi^0 + \Delta x \psi_x^0 + \frac{1}{2} \Delta x^2 \psi_{xx}^0 + \frac{\Delta x^3}{6} \psi_{xxx}^0 + \frac{1}{24} \Delta x^4 \psi_{xxxx}^0 + O(\Delta x^5) \\ \psi(2\Delta x) = \psi^0 + 2\Delta x \psi_x^0 + 2\Delta x^2 \psi_{xx}^0 + \frac{8}{6} \Delta x^3 \psi_{xxx}^0 + \frac{16}{24} \Delta x^4 \psi_{xxxx}^0 + O(\Delta x^5) \\ \psi(3\Delta x) = \psi^0 + 3\Delta x \psi_x^0 + \frac{9}{2} \Delta x^2 \psi_{xx}^0 + \frac{27}{6} \Delta x^3 \psi_{xxx}^0 + \frac{81}{24} \Delta x^4 \psi_{xxxx}^0 + O(\Delta x^5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi_{xx}^0 = \frac{1}{18\Delta x^2} (108\psi(\Delta x) - 27\psi(2\Delta x) + 4\psi(3\Delta x) - 85\psi^0 - 66\psi_x) + O(\Delta x^3) \quad (4.30)$$

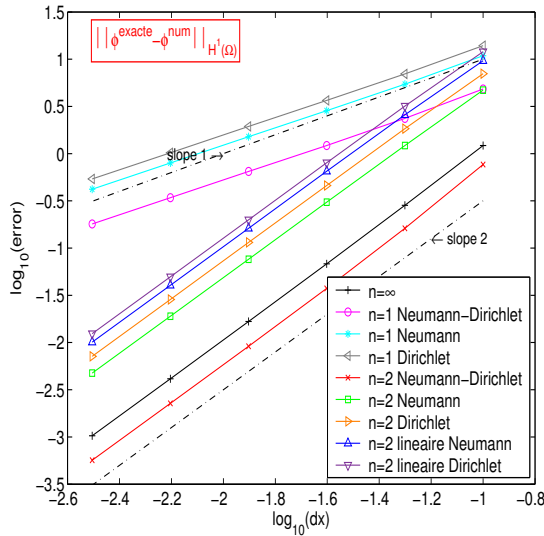
Dans [17], E et Liu font un inventaire des formules variantes de la formule de Thom, dont certaines sont similaires aux formules d'extrapolations décrites ici. Par exemple, l'expression (4.30) correspond à la formule dérivée par Britley. Nous comprenons ici qu'elle ne devrait pas être nécessaire à un schéma d'ordre 2.



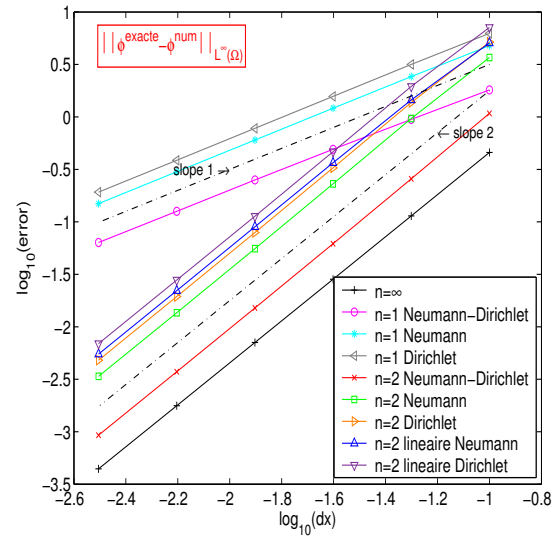
(a) Norme L^2 de l'erreur sur l'extrapolant $\phi_b|_{\partial\Omega_\phi}$



(b) Norme L^2 de l'erreur sur ϕ



(c) Norme H^1 de l'erreur sur ϕ



(d) Norme L^∞ de l'erreur sur ϕ

FIG. 4.7 – Étude de convergence du champ solution ϕ pour les normes d'erreur $L^2(\Omega_\phi)$ (b), $H^1(\Omega_\phi)$ (c) et $L^\infty(\Omega_\phi)$ (d) dans un domaine carré correspondant à la résolution du problème Poisson Dirichlet suivant les 8 extrapolants définis sur $\phi_b|_{\partial\Omega_\phi}$ pour lesquels on vérifie bien l'ordre d'extrapolation annoncé (a)

4.2.2 Extrapolation de $\Delta\psi$ près d'interfaces irrégulières

Nous abordons maintenant la construction d'un extrapolant pour $\Delta\psi$ sur une interface non conforme au maillage. Comme précédemment, nous pouvons envisager deux types de méthodes, soit basées sur des développements limités à partir d'un point du bord, soit utilisant une extrapolation linéaire à partir des valeurs de $\Delta\psi$ sur Ω_ϕ . Au cours de notre discussion, nous nous appuyons sur des données de convergence pour la solution du problème de Poisson ainsi posé, $\mathcal{D}_0^{-1}(\phi_b(\psi, \nabla\psi, \psi_t))$, dans le cas d'un domaine carré avec une inclusion circulaire. Ces résultats sont présentés figures 4.10.

4.2.2.1 Développement limité du champ ψ :

Dans le cas d'un bord régulier, nous pouvons écrire $\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$ pour n'avoir besoin d'extrapoler qu'une des dérivées secondes, l'autre étant accessible analytiquement. Près d'un bord irrégulier, il nous faut travailler en coordonnées cylindriques :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial \theta^2} \quad (4.31)$$

En effet, puisque les champs ψ et $\nabla\psi$ sont prescrits sur l'ensemble $\partial\Omega$, on connaît déjà le second et le troisième terme de cette expression. Reste à calculer ψ_{rr} .

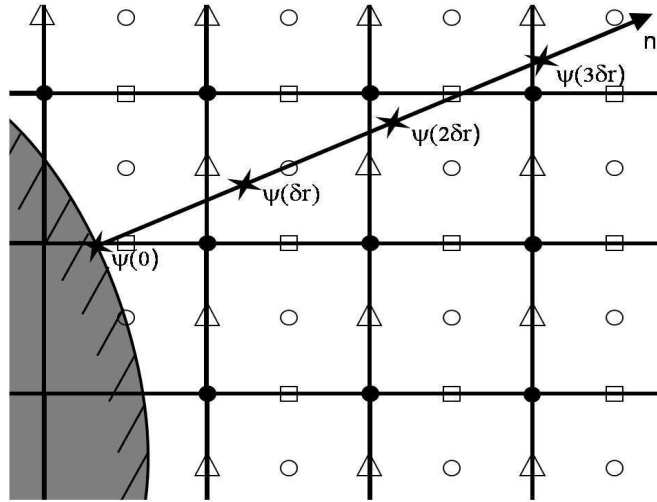


FIG. 4.8 – Position du champ ψ près d'un bord irrégulier sur la grille MAC. La position du champ ψ est défini sur une grille "chimérique" conforme à l'interface [59].

Pour effectuer un développement limité en r , nous avons besoin d'introduire des points qui sont hors grille, comme illustré figure 4.8. Ces points supplémentaires sont disposés sur une grille “chimérique” comme l'appelle Russell [59], dont nous choisissons le pas : $\delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Cette méthode permet d'utiliser des formules d'extrapolations identiques à celles utilisées près d'un bord régulier. En notant $\psi(n\delta r)$ les valeurs de ψ sur la grille chimérique, et ψ^0 , ψ_r^0 , ψ_θ^0 et $\psi_{\theta\theta}^0$ les valeurs au bord, nous pouvons en effet écrire :

$$\begin{aligned}
(n = 1 \text{ Neumann-Dirichlet}) \quad & \psi_{rr}^0 = \frac{2}{\delta r^2} (\psi(\delta r) - \psi^0 - \delta r \psi_r^0) + O(\delta r) \\
(n = 1 \text{ Neumann}) \quad & \psi_{rr}^0 = \frac{2}{3\delta r^2} (\psi(2\delta r) - \psi(\delta r) - \delta r \psi_r^0) + O(\delta r) \\
(n = 1 \text{ Dirichlet}) \quad & \psi_{rr}^0 = \frac{1}{\delta r^2} (\psi(2\delta r) - 2\psi(\delta r) + \psi^0) + O(\delta r) \\
(n = 2 \text{ Neumann-Dirichlet}) \quad & \psi_{rr}^0 = \frac{1}{2\delta r^2} (8\psi(\delta r) - \psi(2\delta r) - 7\psi^0 - 6\delta r \psi_r^0) + O(\delta r^2) \\
(n = 2 \text{ Neumann}) \quad & \psi_{rr}^0 = \frac{1}{11\delta r^2} (-19\psi(\delta r) + 26\psi(2\delta r) - 7\psi(3\delta r) - 12\delta r \psi_r^0) + O(\delta r^2) \\
(n = 2 \text{ Dirichlet}) \quad & \psi_{rr}^0 = \frac{1}{\delta r^2} (-5\psi(\delta r) + 4\psi(2\delta r) - \psi(3\delta r) - 2\psi^0) + O(\delta r^2)
\end{aligned}$$

La difficulté de cette approche, c'est que les quantités $\psi(n\delta r)$ sont des valeurs sur la grille chimérique et doivent être calculées à partir des valeurs de $\psi(\Omega_\phi)$. Or la seule implémentation dont nous disposons pour accéder à ces valeurs utilise des formules d'interpolation linéaire : les quantités $\psi(n\delta r)$ sont ainsi calculées à l'ordre 2, ce qui introduit dans les expressions précédentes des erreurs d'ordre $O(1)$. Cette erreur est clairement visible dans nos tests numériques, sur la convergence de $\mathcal{D}_0^{-1}(\phi_b(\psi, \nabla\psi, \psi_t))$ présentés figure 4.10.

Une alternative consisterait, comme le propose Russell [59], à utiliser des méthodes d'éléments frontières [5] pour calculer certaines des quantités $\psi(n\delta r)$. Cela demande cependant des outils numériques que nous n'avons pas souhaité développer puisque nous avons trouvé une solution qui nous semble plus simple et ne fait pas intervenir l'inversion d'un nouveau problème implicite.

4.2.2.2 Extrapolation linéaire du champ $\Delta\psi$:

En effet, nous avons vu dans le cas de bords réguliers que nous pouvions obtenir la convergence à l'ordre 2 en extrapolant $\Delta\psi$ linéairement à partir de ses valeurs sur Ω_ϕ , sous réserve qu'elles aient elles-même été calculées à l'ordre 2. Nous proposons de suivre la même méthodologie dans le cas d'un domaine irrégulier. Dans le cas

illustré figure 4.9, l'extrapolation linéaire s'écrit ainsi :

$$\Delta\psi(-\theta\Delta x) = (1 + \theta)\Delta\psi(0) - \theta\Delta\psi(\Delta x) + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (4.32)$$

La clé de notre approche est que nous ne faisons intervenir que des valeurs qui sont soit sur le domaine d'intégration Ω_ϕ , soit sur le bord du domaine (et donc sont connues analytiquement). Mais il nous faut maintenant fournir les formules permettant de calculer $\Delta\psi$ à l'ordre 2 près de points irréguliers. Elles sont ici présentées en utilisant les notations de la figure 4.9.

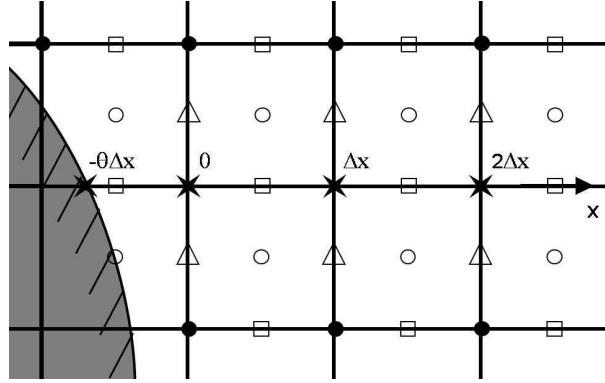


FIG. 4.9 – Position du champ ψ près d'un bord irrégulier sur la grille MAC. L'origine des x est localisé sur le premier point de base dans le domaine Ω_ϕ donc par convention toujours à $\theta\Delta x$ du bord

Approximation linéaire de type Neumann d'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(\Delta x) = \psi^0 + \Delta x \psi_x^0 + \frac{\Delta x^2}{2} \psi_{xx}^0 + \frac{\Delta x^3}{6} \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ \psi(2\Delta x) = \psi^0 + 2\Delta x \psi_x^0 + 2\Delta x^2 \psi_{xx}^0 + \frac{8}{6} \Delta x^3 \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ \psi_x(-\theta\Delta x) = \psi_x^0 - \theta \Delta x \psi_{xx}^0 + \frac{\theta^2 \Delta x^2}{2} \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^3) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \psi_{xx}^0 = \frac{(\frac{4}{3} - \theta^2)\psi(\Delta x) + \frac{1}{2}(\theta^2 - \frac{1}{3})\psi(2\Delta x) + \frac{1}{2}(\theta^2 - \frac{7}{3})\psi^0 - \Delta x \psi_x^0}{(\frac{1}{3} + \theta + \frac{\theta^2}{2})\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (4.33)$$

Approximation linéaire de type Dirichlet d'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(\Delta x) = \psi^0 + \Delta x \psi_x^0 + \frac{\Delta x^2}{2} \psi_{xx}^0 + \frac{\Delta x^3}{6} \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ \psi(2\Delta x) = \psi^0 + 2\Delta x \psi_x^0 + 2\Delta x^2 \psi_{xx}^0 + \frac{8}{6} \Delta x^3 \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ \psi(-\theta\Delta x) = \psi^0 - \theta\Delta x \psi_x^0 + \frac{\theta^2 \Delta x^2}{2} \psi_{xx}^0 - \frac{\theta^3 \Delta x^3}{6} \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \psi_{xx}^0 = \frac{1}{\Delta x^2} \left(-\frac{2(\theta-2)}{\theta+1} \psi(\Delta x) + \frac{\theta+1}{\theta+2} \psi(2\Delta x) + \frac{\theta-3}{\theta} \psi(0) - \frac{6}{\theta(\theta+2)(\theta+1)} \psi(-\theta\Delta x) \right) + O(\Delta x^2) \quad (4.34)$$

Approximation linéaire de type Neumann-Dirichlet d'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(\Delta x) = \psi^0 + \Delta x \psi_x^0 + \frac{\Delta x^2}{2} \psi_{xx}^0 + \frac{\Delta x^3}{6} \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ \psi(-\theta\Delta x) = \psi^0 - \theta\Delta x \psi_x^0 + \frac{\theta^2 \Delta x^2}{2} \psi_{xx}^0 - \frac{\theta^3 \Delta x^3}{6} \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ \psi_x(-\theta\Delta x) = \psi_x^0 - \theta\Delta x \psi_{xx}^0 + \frac{\theta^2 \Delta x^2}{2} \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^3) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \psi_{xx}^0 = \frac{1}{\Delta x^2} \left(-\frac{4\theta}{(\theta+1)^2} \psi(\Delta x) + 2\frac{(3\theta-1)^2}{\theta^2(\theta+1)^2} \psi(-\theta\Delta x) - \frac{2(2\theta-1)}{\theta^2} \psi(0) - \frac{2(\theta-1)\Delta x}{\theta(\theta+1)} \psi_x(-\theta\Delta x) \right) + O(\Delta x^2) \quad (4.35)$$

Nous présentons cette dernière formule par souci d'exhaustivité, mais n'avons étudié que les deux premières. Les courbes de convergence pour la solution $\mathcal{D}_0^{-1}(\phi_b(\psi, \nabla\psi, \psi_t))$ sont présentées figures 4.10. Nous avons bien grâce à cette méthode convergence d'ordre 2, dans les normes $L^2(\Omega_\phi)$, $L^\infty(\Omega_\phi)$ et $H^1(\Omega_\phi)$.

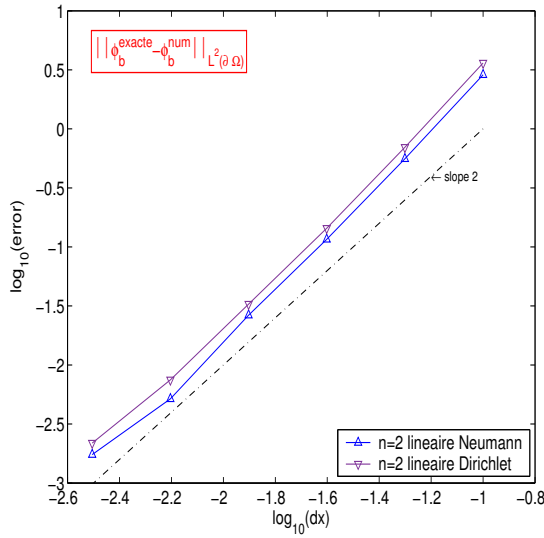
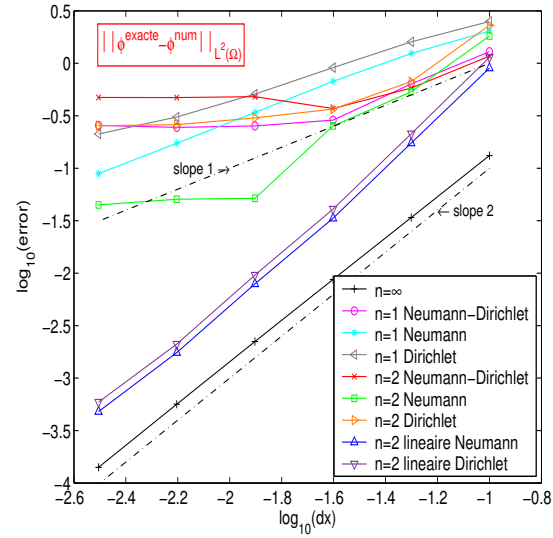
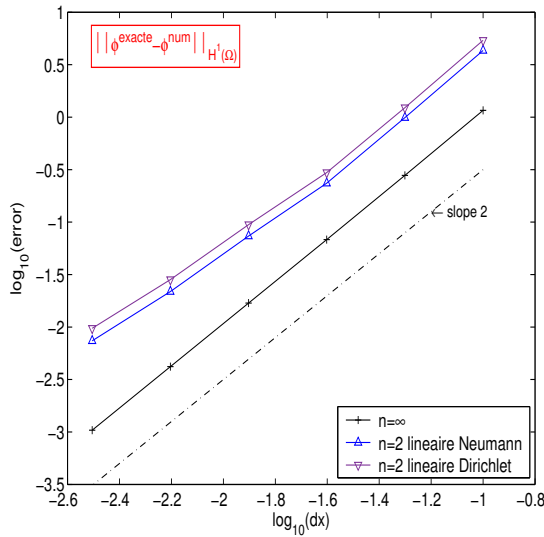
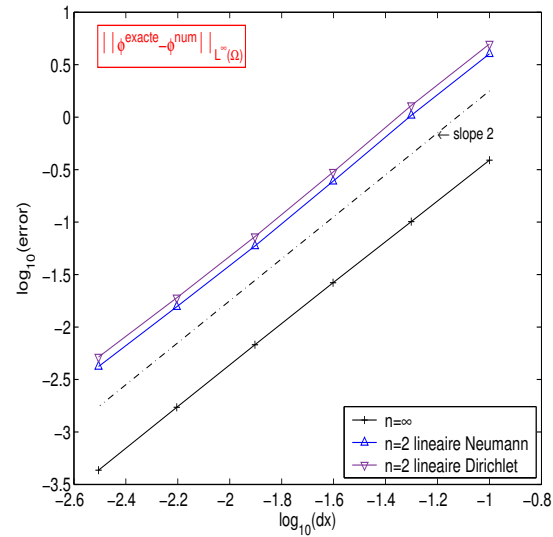
(a) Norme L^2 de l'extrapolant $\phi_b(\partial\Omega_\phi)$ (b) Norme L^2 de l'erreur sur ϕ (c) Norme H^1 de l'erreur sur ϕ (d) Norme L^∞ de l'erreur sur ϕ

FIG. 4.10 – Étude de convergence du champ solution ϕ pour les normes d'erreur $L^2(\Omega_\phi)$ (b), $H^1(\Omega_\phi)$ (c) et $L^\infty(\Omega_\phi)$ (d) dans un domaine carré avec une inclusion figure 4.3a correspondant à la résolution du problème Poisson Dirichlet suivant les 8 extrapolants définis sur $\phi_b|_{\partial\Omega_\phi}$ pour lesquels on vérifie bien l'ordre d'extrapolation annoncé (a)

4.3 Poisson-Neumann avec bord régulier

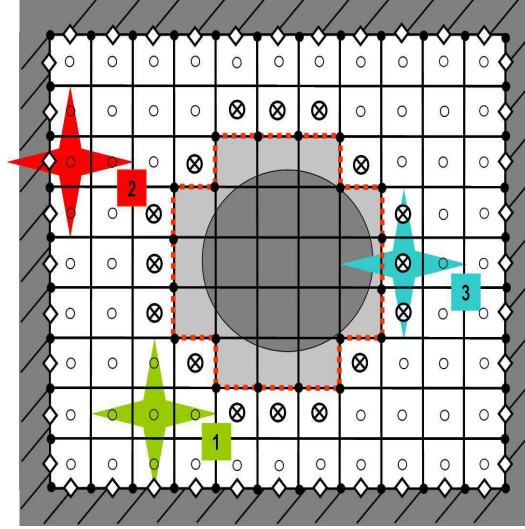


FIG. 4.11 – Exemples de la représentation du domaine de définition du champ p et de son laplacien. Dans le cas $n^{\circ}1$, tous les points du stencil se situent dans le domaine fluide. Le cas $n^{\circ}2$ correspond au cas où le stencil de l'opérateur Laplacien est proche d'une interface régulière. Dans le cas $n^{\circ}3$, le stencil, dont le point-centre est représenté par les symboles \otimes , est situé au plus près d'une interface irrégulière.

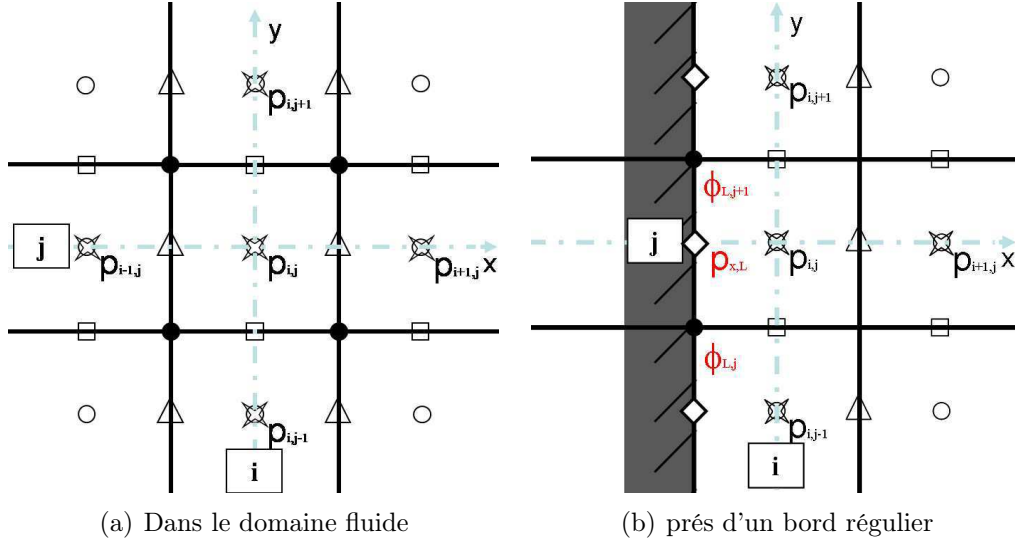
Avant d'aborder l'implémentation de la méthode ϕ - ψ proprement dite, il nous reste encore à étudier un problème elliptique. En effet, partant des champs ϕ et ψ , nous aurons besoin de remonter aux champs physiques, u , v , p . Si le champ de vitesse s'obtient par simple dérivation de la fonction courant, accéder au champ de pression requiert d'inverser l'équation :

$$\nabla p = \nabla^{\perp} \phi + \mathbf{f} \quad , \quad (4.36)$$

Le champ p discrétisé est défini sur tous les points représentés par les symboles \circ et \otimes sur la figure 4.11. Ce domaine sera noté Ω_p . Sont exclus du domaine Ω_p , les points dont la cellule MAC est coupée par l'interface.

Pour évaluer le champ Δp en tout point \circ (cas $n^{\circ}3$, figure 4.11), il suffit d'utiliser le laplacien discret Δ_h :

$$\Delta_h p \equiv \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} - \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} - \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \quad (4.37)$$

FIG. 4.12 – Configuration des points du champ p formant le terme Δp sur une grille MAC

Il s'agit d'une discrétisation centrée 5-points d'ordre 2 :

$$\Delta_h p = \Delta p + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (4.38)$$

Près d'une interface régulière (cas 2, figure 4.11) on ne peut plus utiliser cette expression (4.37). On écrit, par exemple, dans le cas indiqué figure 4.12b, en prenant le point (i, j) comme origine du repère (e.g. $p^0 \approx p_{i,j}$, $p(\Delta x) \approx p_{i+1,j}$, ...):

$$\begin{cases} p(\Delta x) = p^0 + \Delta x p_x^0 + \frac{\Delta x^2}{2} p_{xx}^0 + \frac{\Delta x^3}{6} p_{xxx}^0 + O(\Delta x^3) \\ p_x(-\frac{\Delta x}{2}) = p_x^0 - \frac{\Delta x}{2} p_{xx}^0 - \frac{\Delta x^2}{8} p_{xxx}^0 + O(\Delta x^3) \end{cases}$$

on obtient :

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{p(\Delta x) - p^0}{\Delta x} - p_x \left(-\frac{\Delta x}{2} \right) \right) = p_{xx}^0 + \frac{\Delta x}{24} p_{xxx}^0 + O(\Delta x^2) \quad (4.39)$$

par ailleurs, on obtient sur les bords :

$$p_x \left(-\frac{\Delta x}{2} \right) = f^x + \phi_y \left(-\frac{\Delta x}{2} \right) \quad (4.40)$$

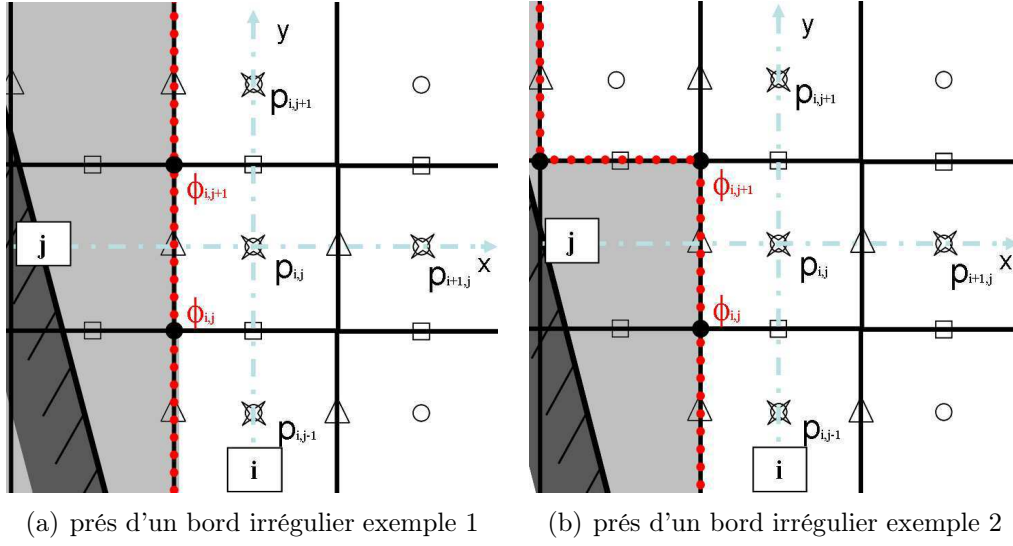


FIG. 4.13 – Configuration des points du champ p formant le terme Δp sur une grille MAC

et par différence centrée on a :

$$\phi_y \left(-\frac{\Delta x}{2} \right) = \frac{\phi \left(\frac{\Delta x}{2} \right) - \phi \left(-\frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta y} + \frac{\Delta y^2}{24} \phi_{yyy} + O(\Delta y^2) \quad (4.41)$$

En substituant (4.40) et (4.41) dans (4.39) on trouve :

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{p(\Delta x) - p^0}{\Delta x} - \frac{\phi \left(\frac{\Delta x}{2} \right) - \phi \left(-\frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta y} \right) = p_{xx}^0 - \frac{f^x}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{24} p_{xxx}^0 + \frac{\Delta y}{24} \phi_{yyy}^0 + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (4.42)$$

Dans le problème matriciel cela devient :

$$\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x^2} + \left(\frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) = (\nabla \cdot f)_{i,j} + \frac{\phi_{L,j+1} - \phi_{L,j}}{\Delta x \Delta y} + \frac{f^y}{\Delta x} + O(\Delta x, \Delta y) \quad (4.43)$$

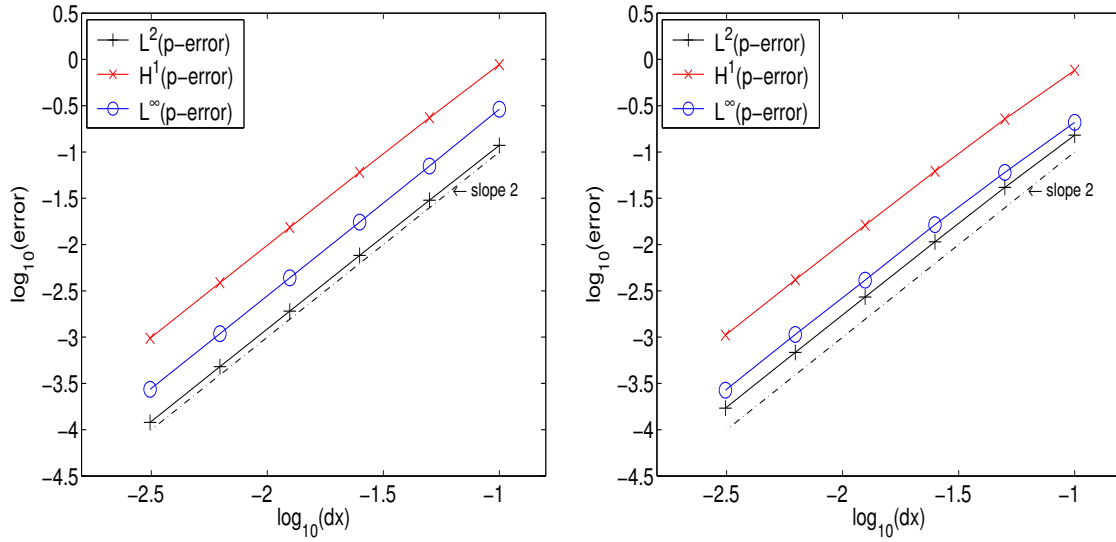
Le terme de gauche de l'équation (4.43) définit les coefficients de la matrice L et le coefficient $b_{i,j}$ de la matrice B prend la valeur $b_{i,j} = 1/(\Delta x \Delta y)$ et $b_{i,j+1} = -1/(\Delta x \Delta y)$

Près d'un bord irrégulier, la situation est plus délicate à traiter. Dans le cas représenté figure 4.13a on pourrait en principe chercher à utiliser les valeurs de ϕ sur certains points du bord, même si ceux-ci sont irréguliers. Ce type de traitement soulèverait, cependant d'énormes difficultés numériques que l'on peut cependant éviter

puisque la méthode $\phi - \psi$ fournit à chaque instant les valeurs du champ ϕ en tout point du domaine Ω_ϕ . Cela en effet nous permet de construire un bord régulier "fictif" défini comme la frontière de toutes les cellules de la grille Mac qui ne sont pas coupées par l'interface, c'est à dire toutes celles du domaine que nous avons défini comme Ω_p .

4.3.1 Validation numérique

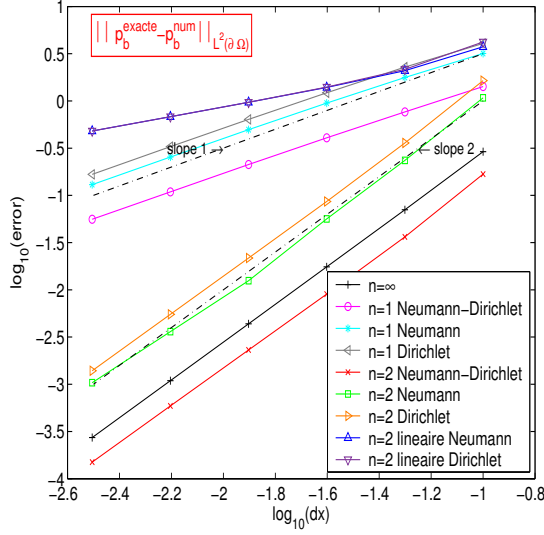
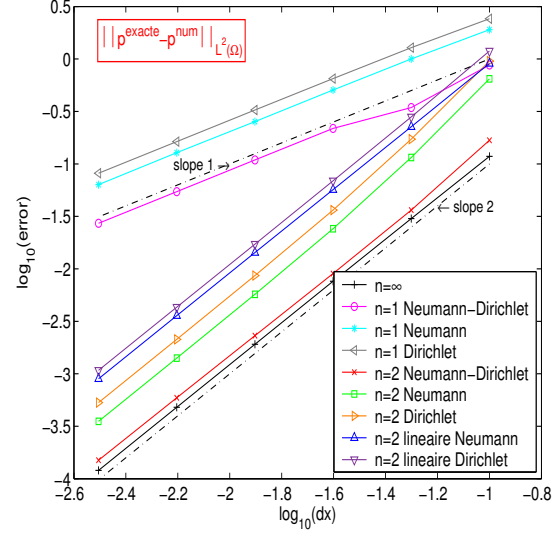
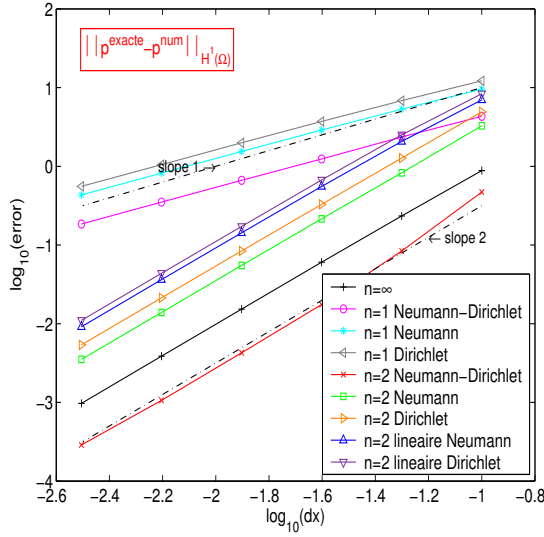
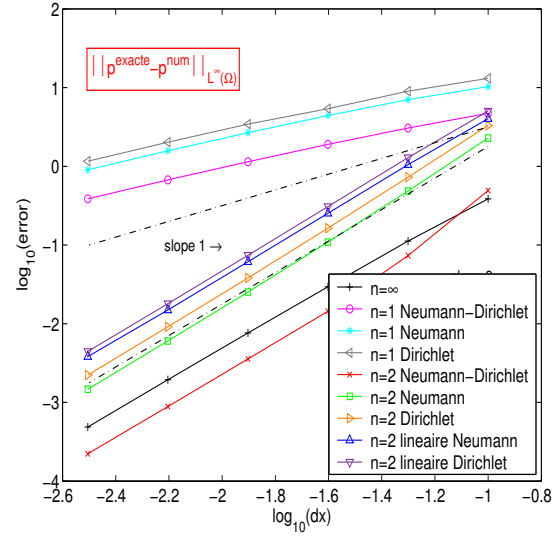
Pour valider le calcul du champ de pression, nous utilisons à nouveau le problème test de Guermond et Shen, comme en section 3.2.1.

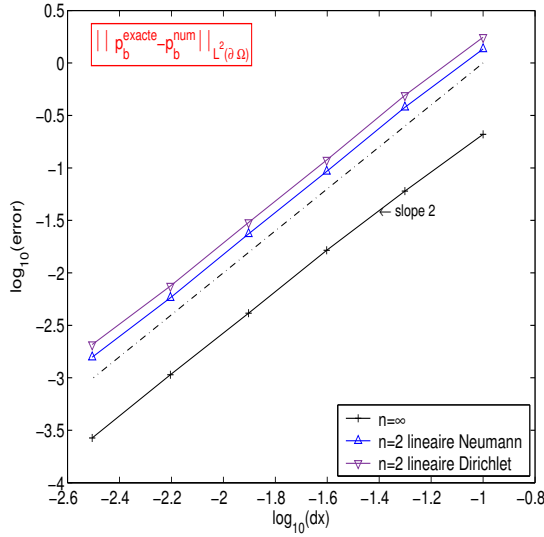
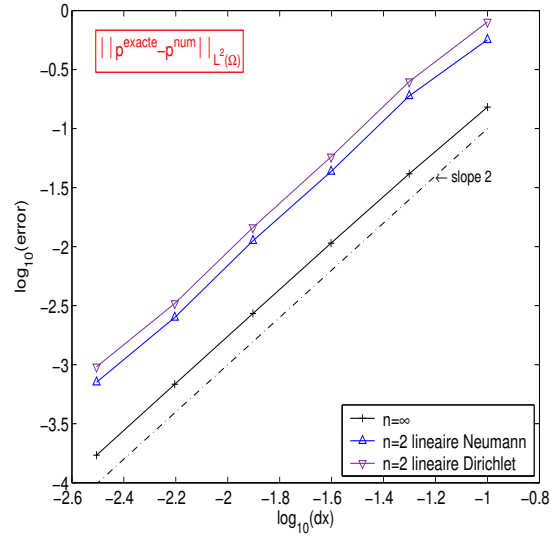
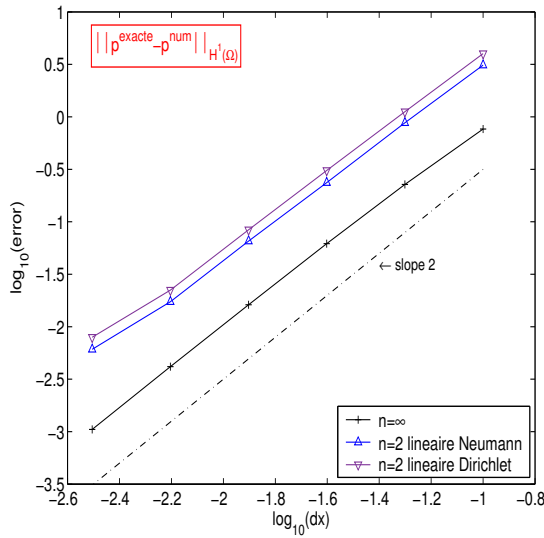
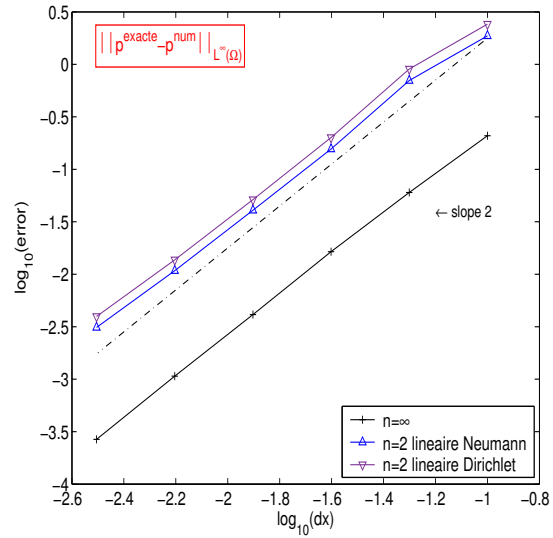


(a) Étude de convergence du champ p dans un domaine carré avec des bords réguliers.

(b) Étude de convergence du champ p dans un domaine carré avec des bords irréguliers.

FIG. 4.14 – Résultats Numériques

(a) Norme L^2 de l'extrapolant $p_b(\partial\Omega_p)$ (b) Norme L^2 de l'erreur sur p (c) Norme H^1 de l'erreur sur p (d) Norme L^∞ de l'erreur sur p FIG. 4.15 – Étude des normes d'erreur L^2 , L^∞ et H^1 dans un domaine carré à $t=1$

(a) Norme L^2 de l'extrapolant $p_b(\partial\Omega_p)$ (b) Norme L^2 de l'erreur sur p (c) Norme H^1 de l'erreur sur p (d) Norme L^∞ de l'erreur sur p FIG. 4.16 – Étude des normes d'erreur L^2 , L^∞ et H^1 dans un domaine carré à $t=1$

4.4 Conclusions

L'étude de la résolution d'un problème de Poisson nécessitait la construction d'un chapitre détaillé. En effet l'implémentation d'un solveur de Poisson en différence finie qui prenne en compte la présence d'interfaces non conformes au maillage n'est pas triviale. Les problèmes aux limites que nous devons résoudre dans la méthode $\phi - \psi$ sont de deux sortes : pour obtenir le champ ϕ le problème de Poisson est muni d'une condition de Dirichlet, pour le champ de pression, le problème est muni d'une condition de Neumann.

Dans un premier temps nous avons traité le problème de Poisson-Dirichlet pour ϕ qui s'écrit sous la forme :

$$(\mathcal{D}_0) \begin{cases} \Delta \phi = \nabla \times \mathbf{f} & \text{sur } \Omega \\ \phi = \phi_b & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.44)$$

Pour $\phi_b(\bullet, t) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Par ce biais, nous avons validé la convergence de notre solveur avec une condition exacte. Nous avons testé deux traitements –linéaire et quadratique– qui nous donnent une convergence d'ordre 2.

La condition réelle du problème (\mathcal{D}_0) s'écrit sous la forme

$$\phi = \Delta \psi - \psi_t \text{ sur } \partial\Omega$$

où $\phi(\bullet, t) \in L^2(\Omega)$ et $\psi(\bullet, t) \in H^2(\Omega)$. La régularité de nos fonctions tests définies dans la section 3.2.1 nous a permis de tester pour différents extrapolants du champ de vorticité $\Delta \psi$ sur $\partial\Omega$ la convergence du solveur de Poisson. Ces extrapolants sont calculés soit (i) par extrapolation du champ ψ défini sur Ω_ϕ soit (ii) par extrapolation linéaire du champ $\Delta \psi$ défini sur Ω_ϕ . Les extrapolants de type (i) se prêtent mal aux interfaces irrégulières. De façon systématique on montre que les ordre de convergence du probleme de Poisson Dirichlet sont identiques à l'ordre de troncature des extrapolants.

L'étude du solveur de Poisson Neumann sur le champ de pression s'écrit sous la forme :

$$(\mathcal{D}_0) \begin{cases} \Delta_h p = \nabla_h \cdot \mathbf{f} & \text{sur } \Omega_p \\ \nabla_h p = \nabla_h^\perp \phi + \mathbf{f} & \text{sur } \partial\Omega_p \end{cases} \quad (4.45)$$

Dans ce problème le domaine Ω_p forme un domaine conforme au maillage. Nous avons utilisé les extrapolants définis pour le problème de Poisson Dirichlet pour écrire $\nabla_h^\perp \phi$. De façon systématique on montre que les ordre de convergence du problème

de Poisson Neumann sont identiques à l'ordre de troncature des extrapolants.

Chapitre 5

Implémentation de la méthode ϕ - ψ

Sommaire

5.1	Construction d'un schéma temporel	88
5.1.1	Principe	88
5.1.2	Un essai insatisfaisant	89
5.1.3	Forçage de la condition de Dirichlet sur ψ	96
5.2	Discussion	107
5.3	Dynamique des constantes	109
5.3.1	Cas d'un canal périodique	111
5.3.2	Cas d'une particule dans un domaine carré	118
5.3.3	Cas d'une particule dans un canal périodique	122
5.4	Conclusion	127

Nous savons maintenant résoudre le problème (4.1) et donc calculer la fonction ϕ qui apparaît explicitement dans l'équation d'évolution (2.13) gouvernant la fonction de courant. Si nous avons dû beaucoup œuvrer afin d'obtenir la résolution spatiale voulue (ordre 2), nous garderons l'intégration temporelle dans sa forme la plus simple, en l'occurrence en utilisant un algorithme d'Euler explicite. Ce choix est motivé par notre souhait de nous concentrer encore sur les questions liées à la résolution spatiale et au traitement des conditions de bord, qui nous allons voir ne sont pas encore tout à fait traitées. Il sera toujours possible ultérieurement d'utiliser les méthodes que nous développons ici dans des algorithmes d'ordre plus élevé en temps (ex : schéma de Richardson). Notons que notre démarche est ici très différente de celle proposée par Guermond et Shen [29, 30] qui justement corrigent les erreurs sur le calcul de la pression par un choix très fin de la dynamique temporelle. Comme nous l'avons vu, notre stratégie est plutôt de construire un algorithme qui résolve avec la meilleure approximation possible le vrai problème inverse physique, afin d'éviter d'avoir à le compléter par une quelconque étape de correction.

5.1 Construction d'un schéma temporel

5.1.1 Principe

Étant donné un pas de temps Δt , nous noterons $t^n = n \Delta t$. La solution exacte du problème continu (2.13) sera notée $\psi(t^n)$, à distinguer des valeurs de la solution numérique au même temps, notée ψ^n . Le schéma d'Euler explicite s'écrit :

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \Delta t (\Delta_h \psi^n - \phi^n) \quad (5.1)$$

Dans (5.1), le calcul du terme $\Delta_h \psi^n$ sera toujours effectué en utilisant les approximations d'ordre 2 que nous avons énoncées en section 4.2. Nous avons vu qu'il y a principalement deux choix à faire parmi ces approximations, selon que l'on fasse intervenir la condition de Dirichlet ou celle de Neumann. La physique nous guide vers la condition de Neumann ; la simplicité vers celle de Dirichlet, en particulier près d'un bord régulier. Nous avons implémenté les deux.

À chaque pas de temps, ψ^n devra être calculée à partir :

- des valeurs de la solution numérique ϕ^n sur le domaine d'intégration Ω_ϕ
- des conditions de bord, les valeurs de $\psi(t^n; \partial\Omega)$, $\psi_t(t^n; \partial\Omega)$ et $\nabla\psi(t^n; \partial\Omega)$ étant supposées connues.

Nous allons temporairement nous affranchir de la difficulté, discutée en section 2.3,

liée au fait que nous ne connaissons $\psi(t^n; \partial\Omega)$ et $\psi_t(t^n; \partial\Omega)$ qu'à des constantes $c^\alpha(t)$ dépendantes du temps près. Nous compléterons le schéma numérique pour prendre cette difficulté en compte à la fin du chapitre.

Remarquons qu'il est difficile de pouvoir proposer un schéma implicite, tout en n'inversant que des opérateurs de Laplace. En effet, nous arriverions, par exemple à une équation de la forme,

$$\left(I - \frac{\mu}{\rho} \Delta t \Delta\right) \psi^{n+1} = \psi^n - \Delta t \phi^n \quad (5.2)$$

ce qui semble conduire immédiatement aux méthodes proposées par Ben-Artzi et ses collaborateurs [2, 3] et requiert l'inversion d'un bi-laplacien.

5.1.2 Un essai insatisfaisant

Guidé par la discussion du chapitre précédent, nous essayons donc de calculer ψ^n en résolvant le problème discret suivant :

$$\begin{cases} \Delta_h \phi^n &= \nabla \times \mathbf{f} & \text{sur } \Omega_\phi \\ \phi^n &= \Delta_h \psi^n - \psi_t & \text{sur } \partial\Omega_\phi \end{cases} \quad (5.3)$$

Avec les notations introduites au chapitre précédent, cette solution est :

$$\phi^n = \mathcal{D}_0^{-1}(\phi_b(\psi^n, \psi, \nabla \psi, \psi_t)), \quad (5.4)$$

les trois derniers arguments de ϕ_b étant des fonctions continues, évaluées au temps t^n et aux points du bord $\partial\Omega_\phi$. Notre algorithme d'intégration numérique, équations (5.1) et (5.3) s'écrit donc :

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \Delta t (\Delta_h \psi^n - \phi^n) \quad (5.5a)$$

$$\Delta_h \phi^n = \nabla \times \mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega_\phi \quad (5.5b)$$

$$\phi^n = \Delta_h \psi^n - \psi_t \quad \text{sur } \partial\Omega_\phi \quad (5.5c)$$

Notons que dans cette équation la notation Δ_h du laplacien discret recouvre beaucoup de nuances. Le chapitre précédent nous a en effet appris que :

- le laplacien opérant sur ϕ^n peut être calculé à l'ordre 0 ou 1—ce qui permet de n'inverser que des matrices pentadiagonales, symétriques ou non—et incorpore la condition de Dirichlet (nous utilisons l'approximation à l'ordre 1 (équation 4.11))

- le laplacien opérant sur ψ^n doit être calculé à l'ordre 2 dans l'équation (5.5a), si l'on veut que ϕ^n soit à l'ordre 2 ($\Delta_h \psi$ doit aussi être calculé à l'ordre 2 dans l'équation (5.5a) pour garantir la convergence du schéma d'Euler).
- des expressions différentes seront utilisées pour calculer $\Delta_h \psi$, selon qu'il apparaît dans les équations (5.5a) ou (5.5c), puisqu'elles sont écrites respectivement sur Ω_ϕ et $\partial\Omega_\phi$.

En plus du choix de la précision de ces différents opérateurs il y a aussi celui d'utiliser la condition de Neumann, de Dirichlet, ou parfois même un mélange des deux, comme nous l'avons vu section 4.2. Les choix possibles de discrétisation sont donc très nombreux. La question est de savoir s'il mènent à des algorithmes qui sont consistants et qui convergent comme les estimations des erreurs de troncature le suggèrent.

Afin de tester ces choix d'implémentation, nous utilisons le test de Guermond-Shen discuté section 3.2.1 dans la situation la plus simple : une cellule de simulation carrée sans inclusion. La validation s'appuie sur le calcul de l'erreur intégrée en temps (3.16), pour différentes résolutions spatiales.

Le premier choix d'implémentation concerne le calcul de $\Delta_h \psi$ sur Ω_ϕ , mais près du bord, c'est à dire quand le stencil centré usuel fait intervenir un point de $\partial\Omega_\phi$. Le stencil centré fait intervenir la condition de Dirichlet. Or la physique suggère d'utiliser plutôt la condition de Neumann pour ce calcul. Nous avons ici deux possibilités : Dirichlet ou Neumann.

Conditions de Dirichlet pour $\Delta_h \psi$ sur Ω_ϕ

Commençons par la simplicité en utilisant la condition de Dirichlet. Nous comparons figure 5.2 (par ligne, de haut en bas) pour les champs $\phi^n - \phi(t^n)$, $\psi^n - \psi(t^n)$, $u^n - u(t^n)$ et $p^n - p(t^n)$ les résultats de convergence de l'algorithme (5.5), en utilisant différentes méthodes d'extrapolation pour calculer l'extrapolant $\Delta_h \psi^n$ au bord. Les formules d'extrapolation utilisées sont les mêmes que dans la figure 4.7, où nous testions la convergence du solveur pour le problème (5.5b). Nous avons alors observé que la convergence de notre inversion était limitée par l'ordre d'approximation utilisé pour calculer l'extrapolant. Mais toutes les extrapolations d'ordre 2 permettaient effectivement d'obtenir la solution à cet ordre.

Ici, nous trouvons cependant que pour plusieurs extrapolants d'ordre 2 l'algorithme ne converge pas (ordre 0). Certes, les extrapolants de type Neumann-Dirichlet (équations (4.21) et (4.24) de la section 4.2) permettent effectivement d'accéder à la convergence espérée, voire même mieux puisque la méthode $n = 1$ *Neumann-*

Dirichlet converge à l'ordre 2. On retrouve le même phénomène pour la méthode $n = 1$ *Neumann* qui converge à l'ordre 2 et l'extrapolant $n = 2$ *Neumann* qui a une convergence supérieure à 2. Les autres méthodes dans lesquelles l'extrapolant utilise uniquement une condition de Dirichlet ne converge pas. Non seulement la convergence est insatisfaisante, mais surtout la dispersion des données fait qu'il est difficile de conclure.

Conditions de Neumann pour $\Delta_h \psi$ sur Ω_ϕ

Nous avons donc implémenté la condition de Neumann pour essayer d'améliorer ces défauts. Nous avons obtenu les résultats suivants, selon les méthodes utilisées pour extrapoler $\Delta_h \psi$ sur $\partial\Omega_\phi$ (voir Section 4.2 équations (4.21) à (4.29) pour les formules utilisées) :

1. si l'on utilise $n=1$ *Dirichlet* ou $n=2$ *Dirichlet* (voir Section (4.2.1.1) et (4.2.1.2)), l'algorithme est instable. Nous interprétons ce résultat par le fait que les expressions pour $\Delta_h \psi$ sur le bord $\partial\Omega_\phi$ lui-même et dans son voisinage sont inconsistentes entre elles.
2. si l'on utilise $n=1$ *Neumann* ou $n=2$ *Neumann* l'algorithme donne un résultat qui converge mal vers la solution espérée. Nous reviendrons sur ce point juste après.
3. si l'on utilise $n=1$ *Neumann-Dirichlet* ou $n=2$ *Neumann-Dirichlet* nous obtenons convergence d'ordre 2.
4. si l'on utilise $n=2$ *linéaire Neumann*, l'algorithme donne un résultat qui converge mal vers la solution espérée. On pourrait trouver asymptotiquement convergence à l'ordre 1, mais les données semblent peu fiables, et l'amplitude de l'erreur est importante aux résolutions utilisées.

Les résultats de convergence correspondants sont résumés figure 5.3 (respectivement pour $\phi^n - \phi(t^n)$, $\psi^n - \psi(t^n)$, $u^n - u(t^n)$ et $p^n - p(t^n)$).

Conséquences

Nous voyons qu'il y a beaucoup de difficultés à garantir que les conditions de bord sont implémentées de façon consistante. Parfois, cela mène à des algorithmes qui ne parviennent pas du tout à fonctionner. Dans plusieurs cas, l'algorithme donne un résultat, mais ne converge pas vers la solution du problème.

Afin de mieux comprendre l'origine de ces erreurs, revenons sur le cas 3 de l'énumération précédente, pour la méthode d'extrapolation $n=1$ *Neumann*. Nous comparons

figure 5.1 une coupe du champ ψ^n à sa valeurs exacte $\psi(t^n)$. L'erreur est surtout significative près du bord. Cela signifie, en particulier, que la condition de Dirichlet sur le champ ψ est loin d'être satisfaite. Dans ce cas, l'usage de la condition de Neumann pour le calcul de $\Delta_h \psi$ au bord et dans son voisinage reste cohérent, mais rien ne parvient à garantir que la condition de Dirichlet soit simultanément satisfaite.

Or le champ ϕ , à travers la condition de bord (5.5c) devrait justement garantir qu'elle le soit, pas seulement à cause du terme Laplacien, mais aussi, et surtout à travers le terme ψ_t . Dans ce terme, cependant, la valeur de $\psi(t)$ n'intervient que de façon indirecte. Jamais nous ne forçons ψ^{n+1} à être égal à $\psi(t^{n+1})$ sur $\partial\Omega$. En conséquence, nous n'avons qu'un contrôle très faible sur les erreurs numériques qui vont inévitablement s'introduire au bord : les valeurs de ψ au bord peuvent donc dériver sans jamais parvenir à retrouver des valeurs consistantes avec la condition de Dirichlet.

Cette interprétation des difficultés présentées par le cas 3 est confirmé par les bons résultats obtenus en utilisant pour l'extrapolant de $\Delta_h \psi$ les expressions dites *Neumann-Dirichlet*, qui mélangent ces deux conditions. Il semble donc nécessaire, pour garantir la convergence de l'algorithme, de faire intervenir explicitement les deux conditions de bord.

Nous disposons donc déjà de plusieurs méthodes qui convergent à l'ordre 2 quand le problème ne fait intervenir que des bords conformes au maillage. Nous ne pouvons cependant nous arrêter à ce plutôt bon résultat. Comme nous l'avons vu en effet en section 4.2.2.1, il n'est pas possible d'utiliser le développement de Taylor pour calculer les extrapolants de $\Delta_h \psi$ près d'un bord non-conforme. Les seules expressions qui nous avait permis de résoudre le problème de Poisson vérifié par ϕ , étant celles qui utilisent une extrapolation de $\Delta_h \psi$ à partir de ses valeurs dans le domaine fluide Ω_ϕ . Or ces méthodes ne donnent pas, ici, de convergence satisfaisante. Il apparaît donc nécessaire d'introduire un outil numérique supplémentaire permettant d'effectuer un forçage de la condition de Dirichlet sur ψ .

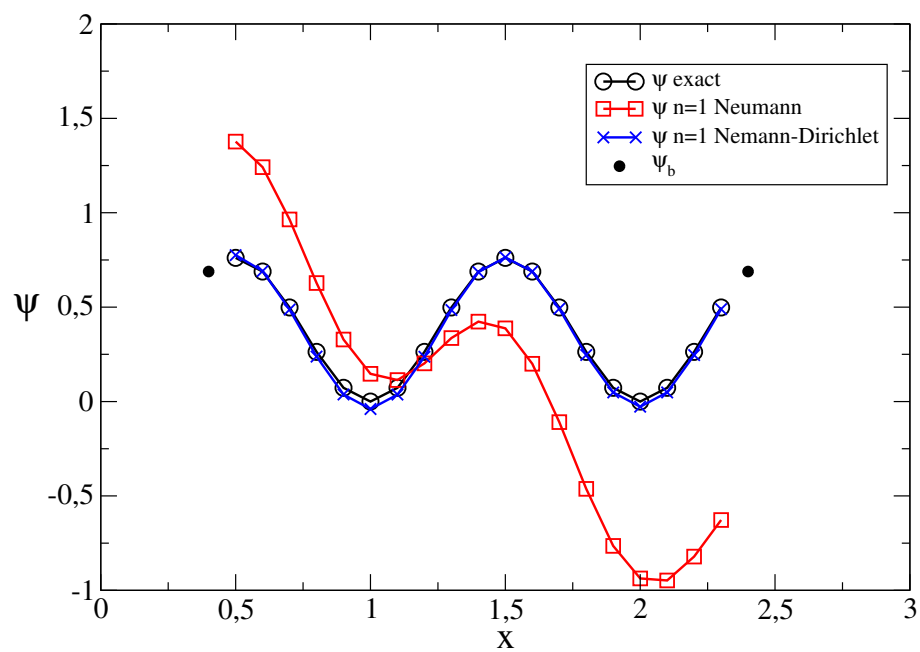


FIG. 5.1 – coupe du champ ψ en i pour un résolution 20×20 à $t = 1$

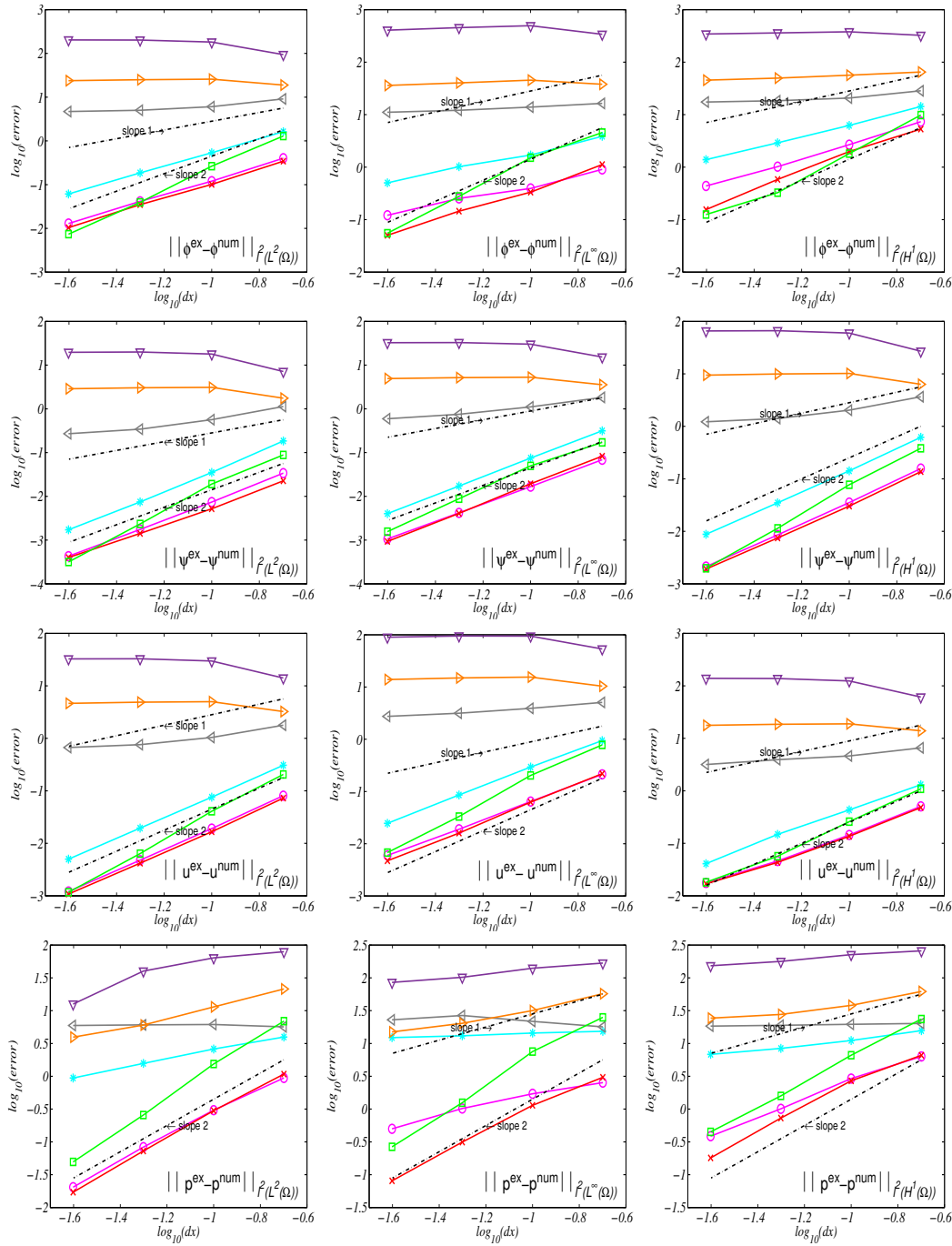


FIG. 5.2 – Études de convergence pour le cas où $\Delta_h \psi$ est implémenté avec un condition de Dirichlet sur Ω_ϕ : représenté par ligne respectivement les champs ϕ , ψ , u et p et par colonnes respectivement les normes $l^2(L^2)$, $l^2(L^\infty)$ et $l^2(H^1)$ sur leur domaine respectif. Légendes : (o) $n=1$ Neumann-Dirichlet, (*) $n=1$ Neumann, (<) $n=1$ Dirichlet, (x) $n=2$ Neumann-Dirichlet, (□) $n=2$ Neumann, (▷) $n=2$ Dirichlet et (▽) $n=2$ linéaire Dirichlet.

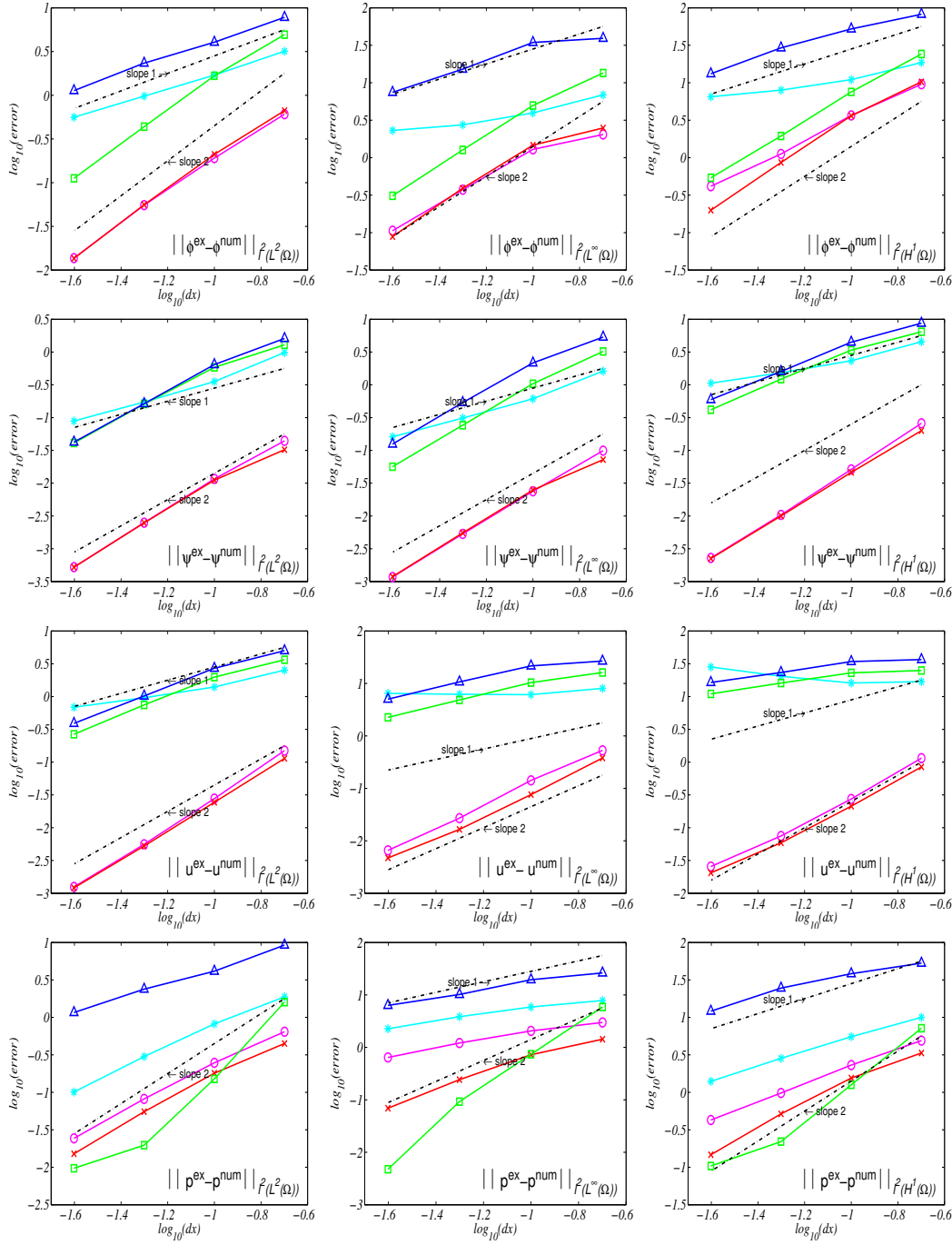


FIG. 5.3 – Études de convergence pour le cas où $\Delta_h \psi$ est implémenté avec un condition de Neumann sur Ω_ϕ : représenté par ligne respectivement les champs ϕ , ψ , u et p et par colonnes respectivement les normes $\ell^2(L^2)$, $\ell^2(L^\infty)$ et $\ell^2(H^1)$ sur leur domaine respectif. Légendes : (o) $n=1$ Neumann-Dirichlet, (*) $n=1$ Neumann, (x) $n=2$ Neumann-Dirichlet, (□) $n=2$ Neumann et (△) $n=2$ linéaire Neumann.

5.1.3 Forçage de la condition de Dirichlet sur ψ

Nous chercherons ici à forcer l'égalité $\psi^{n+1} = \psi(t^{n+1})$ sur $\partial\Omega$. Pour cela, on voudrait pouvoir discrétiser le terme ψ_t de la condition de bord (5.5c), sous la forme :

$$\psi_t \sim \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t}$$

Mais il faut alors donner un sens à cette expression au bord à partir de valeurs du champ de grille ψ^n à l'intérieur du domaine fluide, c'est à dire sur $\mathring{\Omega}_\phi$. Sur le bord, nous allons donc comparer $\psi(t^{n+1})$ à une extrapolation du champ ψ^n . En notant $E(\psi^n)$ une telle extrapolation, nous proposons un algorithme qui s'écrit sous la forme :

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \Delta t (\Delta_h \psi^n - \phi^n) \quad (5.6a)$$

$$\Delta_h \phi^n = \nabla \times \mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega_\phi \quad (5.6b)$$

$$\phi^n = \Delta_h \psi^n - \frac{1}{\Delta t} (\psi(t^{n+1}) - E(\psi^n)) \quad \text{sur } \partial\Omega_\phi \quad (5.6c)$$

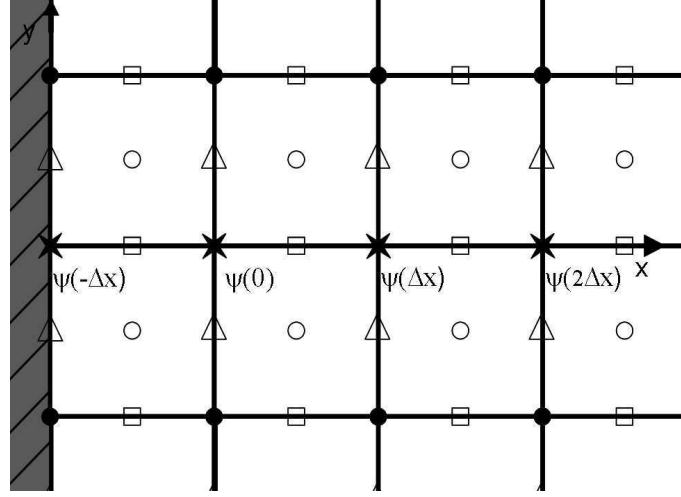
On voit immédiatement qu'en injectant l'équation (5.6c) dans (5.6a), on garantit bien la condition de Dirichlet sur ψ^{n+1} , à une erreur près liée à l'extrapolation utilisée. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, il nous faut évaluer le terme $\frac{1}{\Delta t} (\psi(t^{n+1}) - \psi^n)$ à l'ordre $O(\Delta x^2)$. Or, nous nous attendons à être restreint par une condition de CFL, et utiliserons des pas de temps $\Delta t = \alpha \Delta x^2$. Cela suggère qu'il nous faille calculer $E(\psi^n)$ à l'ordre $O(\Delta x^4)$.

5.1.3.1 Extrapolation près d'un bord régulier

Près d'un bord régulier, en utilisant l'exemple et les conventions de notation de la figure 5.4, il vient :

$$\begin{cases} \psi^n(-\Delta x) &= \psi^n(0) - \Delta x \psi_x^n(0) + \frac{\Delta x^2}{2} \psi_{xx}^n(0) - \frac{\Delta x^3}{6} \psi_{xxx}^n(0) + O(\Delta x^4) \\ \psi^n(\Delta x) &= \psi^n(0) + \Delta x \psi_x^n(0) + \frac{\Delta x^2}{2} \psi_{xx}^n(0) + \frac{\Delta x^3}{6} \psi_{xxx}^n(0) + O(\Delta x^4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi^n(-\Delta x) = 2\psi^n(0) - \psi^n(\Delta x) + \Delta x^2 \psi_{xx}^n(0) + O(\Delta x^4) \quad (5.7)$$

FIG. 5.4 – Position du champ ψ près d'un bord régulier sur la grille MAC

puis nous utilisons l'expression (4.29) pour calculer ψ_{xx}^0 :

$$\psi_{xx}^n(0) = \frac{1}{11\Delta x^2}(2\psi^n(\Delta x) + 2\psi^n(2\Delta x) - 4\psi^n(0) - 6\Delta x\psi_x^n(0)) + O(\Delta x^2) \quad (5.8)$$

Ces deux équations définissent notre extrapolation de ψ^n .

Remarquons que même si en apparence nous introduisons une approximation d'ordre supérieur à celles vues jusqu'à présent, cette expression ne fait intervenir que des termes du même ordre que ceux déjà utilisés dans notre dérivation des extrapolants de $\Delta\psi$ à l'ordre $O(\Delta x^2)$ (voir par exemple les extrapolations des équations (4.24), (4.29) ou (4.30)). Cela nous conforte dans la cohérence du schéma auquel nous parvenons.

Nous validons maintenant le schéma (5.6) en revenant au test de Guermond-Shen, dans le cas de notre cellule de simulation carrée. Nous présentons figure 5.5 une coupe du champs ψ^n comparée à la solution exacte $\psi(t^n)$ au temps $t = 1$, pour constater que le problème observé aux bords dans notre implémentation naïve, figure 5.1, a disparu. Nous forçons bien, comme espéré la condition de Dirichlet sur ψ .

Nos résultats de convergence en norme sont présentés figures (5.6)-(5.7) pour les champs ϕ et ψ (resp.). Nous observons bien une convergence d'ordre 2 de notre algorithme, mais avec une surprise, puisque cet ordre de convergence est obtenu quelle que soit la formule d'extrapolation utilisée pour calculer $\Delta\psi$ au bord. Il semble donc que non seulement le forçage que nous effectuons de ψ^{n+1} au bord joue son rôle

en évitant toute dérive des valeurs de ψ au bord, mais qu'il annule aussi certaines erreurs. Nous n'avons aucune interprétation précise de ce phénomène.

Évidemment, nous nous sommes demandé s'il était vraiment utile d'utiliser une extrapolation d'ordre $O(\Delta x^4)$ pour calculer ψ^n sur $\partial\Omega$ et nous avons aussi implémenté des extrapolations d'ordre moins élevé de ce terme pour constater qu'elles donnaient systématiquement des défauts de convergence, comme prévu par notre analyse.

Notons enfin que nous obtenons la convergence souhaitée dans toutes les normes $l^2(L^2)$, $l^2(L^\infty)$, et $l^2(H^1)$, dans le domaine.

Outre la convergence des champ ψ et ϕ , les résultats de convergence pour le champ de vitesse et le champ de pression sont présentés respectivement figures 5.8 et 5.9. Le champ de vitesse est obtenu par simple dérivation de la fonction de courant en différence centrées (la disposition de la grille MAC aidant). Il présente aussi une convergence d'ordre 2 sur toutes les normes étudiées.

Le champ de pression est calculé en inversant l'équation (2.12). Ce problème inverse présentant des conditions de bord de Neumann, les détails de son implémentation seront présentés au chapitre suivant. La convergence du champ de pression est aussi obtenue, mais avec apparemment un ordre un peu plus faible que 2 pour les normes $l^2(L^\infty(\Omega_p))$, et $l^2(H^1(\Omega_p))$. C'est en fait au niveau du champ de pression que nous retrouvons la trace des ordres d'approximation utilisés dans le calcul du terme de bord (5.6c). Nous n'avons pas d'explication particulière pour ce point précis.

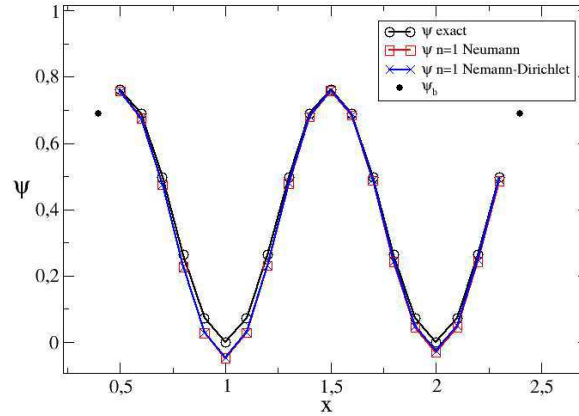
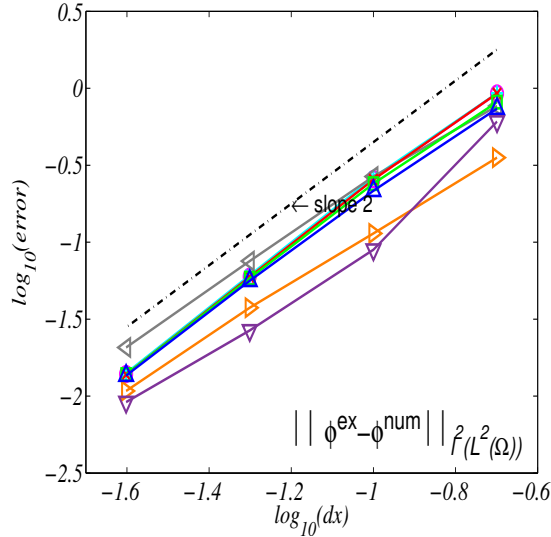
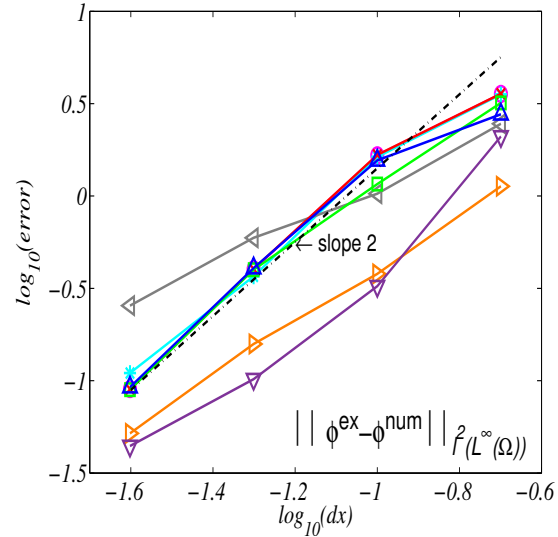
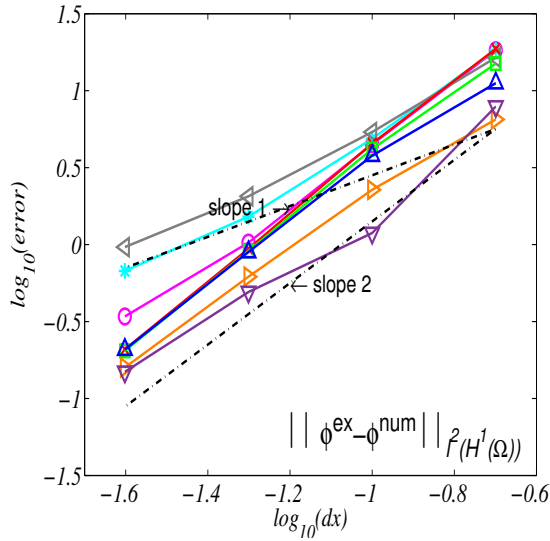
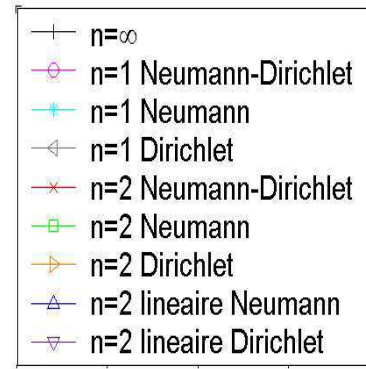
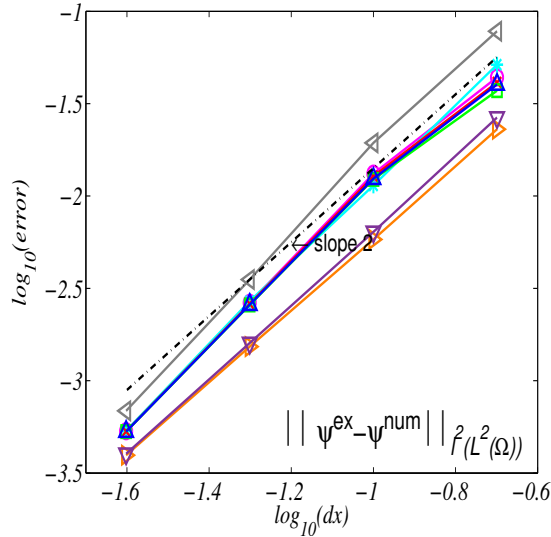
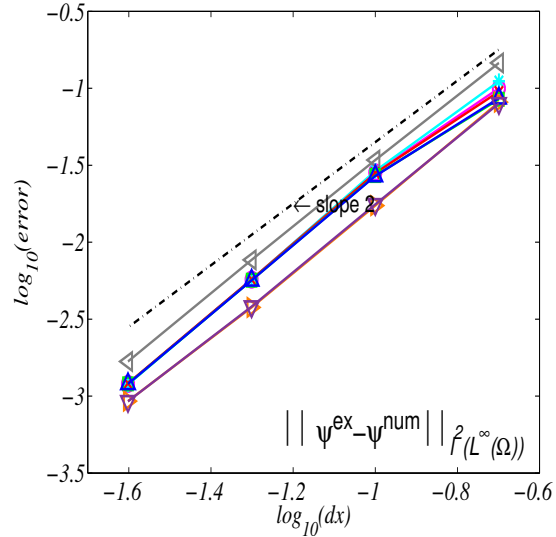
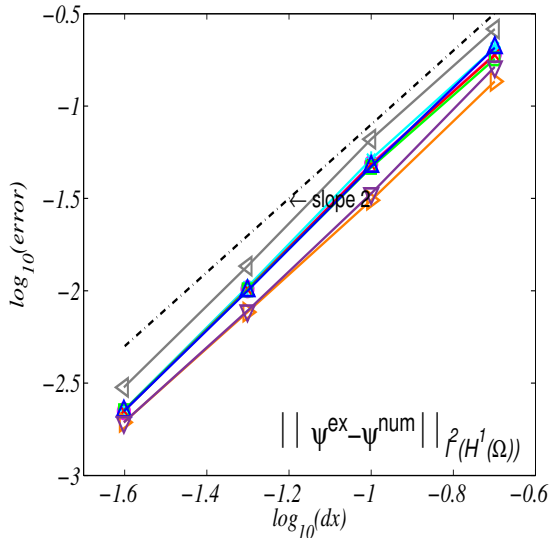
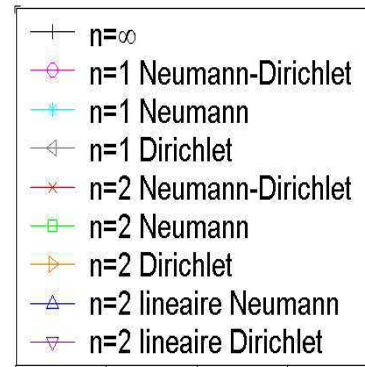


FIG. 5.5 – Coupe du champ ψ en x pour un résolution 20×20 à $t = 1$

(a) Norme $\ell^2(L^2(\Omega_\phi))$ de l'erreur sur ϕ (b) Norme $\ell^2(L^\infty(\Omega_\phi))$ de l'erreur sur ϕ (c) Norme $\ell^2(H^1(\Omega_\phi))$ de l'erreur sur ϕ 

(d) Légendes

FIG. 5.6 – Étude des normes de l'erreur sur ϕ dans un domaine carré à $t=1$

(a) Norme $\ell^2(L^2(\Omega_\phi))$ de l'erreur sur ψ (b) Norme $\ell^2(L^\infty(\Omega_\phi))$ de l'erreur sur ψ (c) Norme $\ell^2(H^1(\Omega_\phi))$ de l'erreur sur ψ 

(d) Légendes

FIG. 5.7 – Étude des normes de l'erreur sur ψ dans un domaine carré à $t=1$

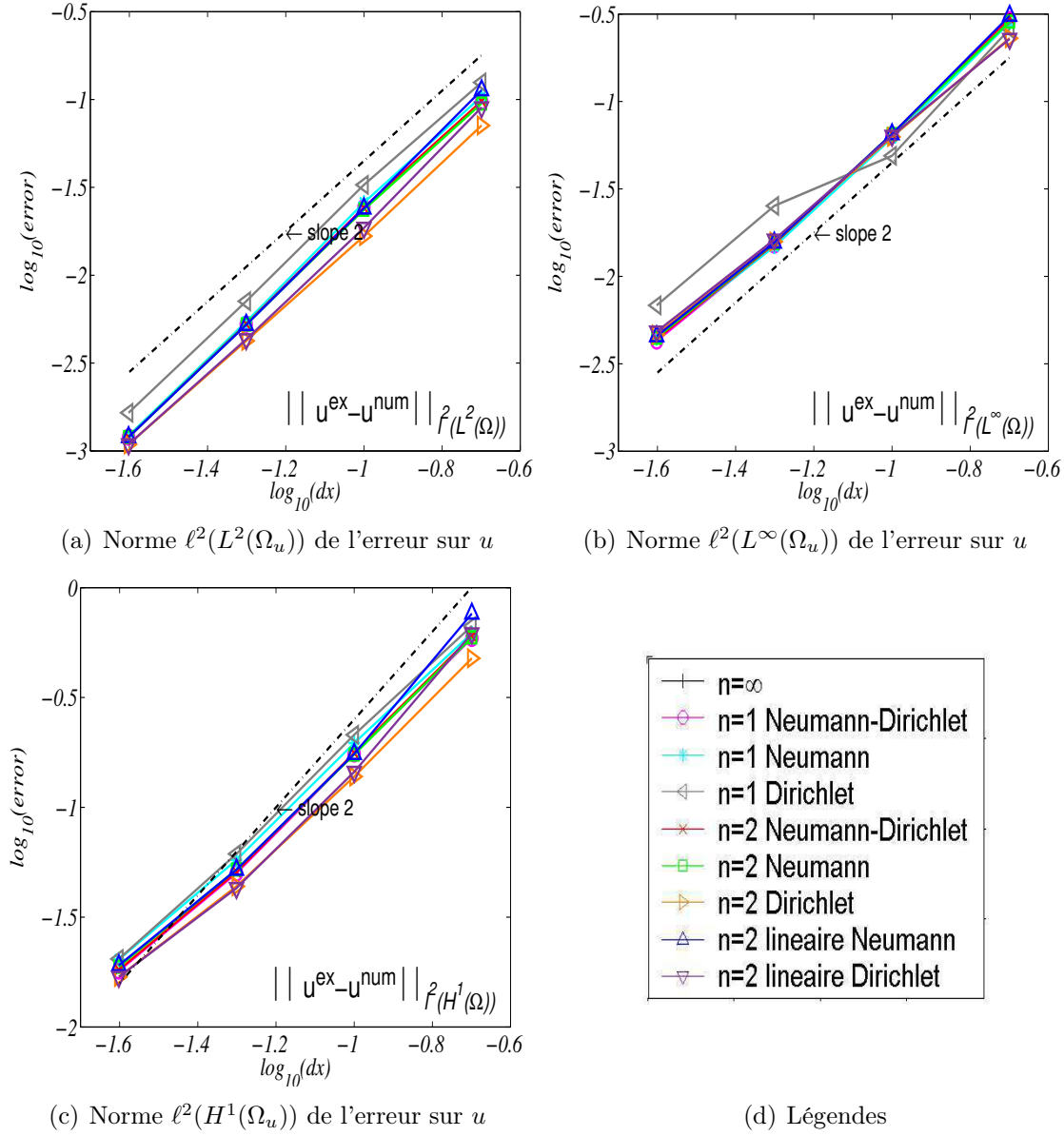
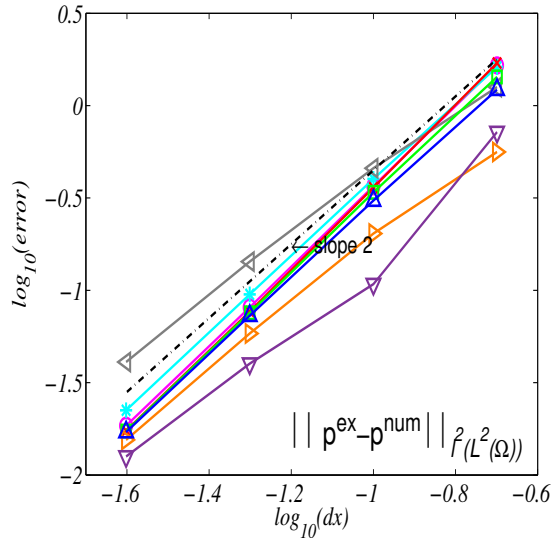
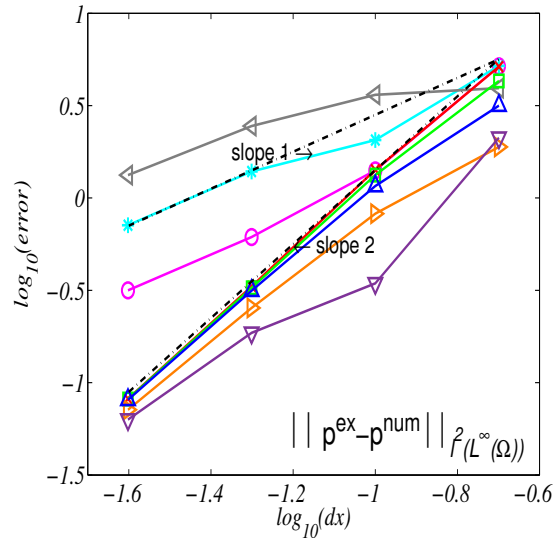
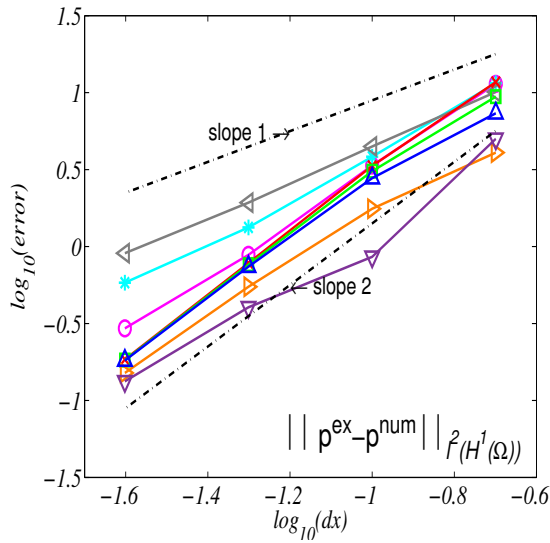
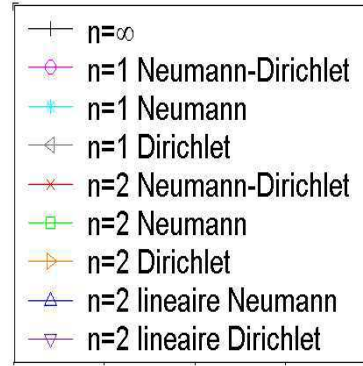


FIG. 5.8 – Étude des normes de l'erreur du champ de vitesse dans un domaine carré à $t=1$

(a) Norme $\ell^2(L^2(\Omega_p))$ de l'erreur sur p (b) Norme $\ell^2(L^\infty(\Omega_p))$ de l'erreur sur p (c) Norme $\ell^2(H^1(\Omega_p))$ de l'erreur sur p 

(d) Légendes

FIG. 5.9 – Étude des normes de l'erreur sur le champ de pression dans un domaine carré à $t=1$

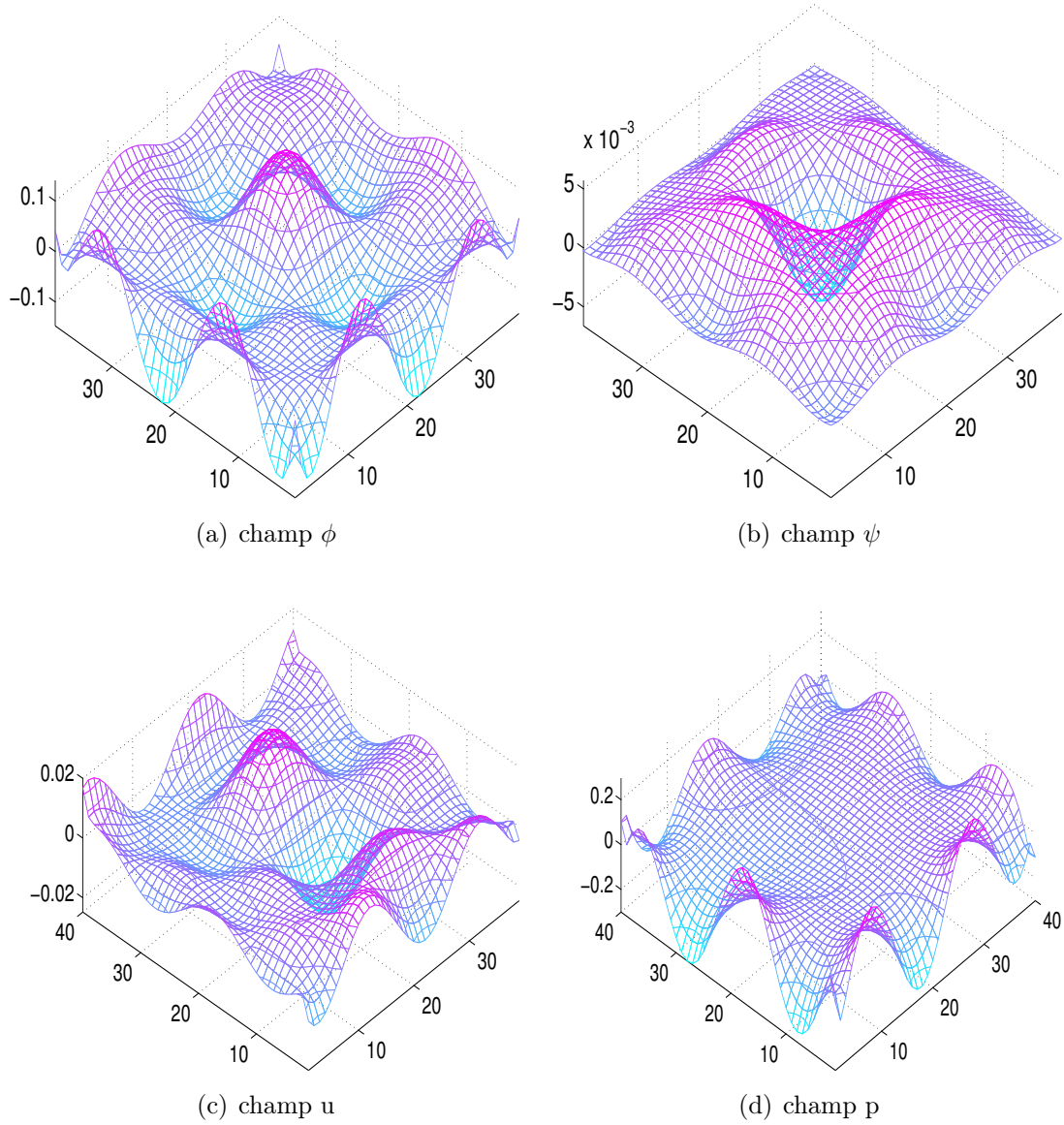


FIG. 5.10 – Représentation spatiale de l'erreur relative des champs $\hat{\phi}_{i,j} = \phi(x_i, y_j) - \phi_{i,j}$ (a), $\hat{\psi}_{i,j} = \psi(x_i, y_j) - \psi_{i,j}$ (b), de la composante du champ de vitesse $\hat{u}_{i,j} = u(x_i, y_j) - u_{i,j}$ (c) et du champ de pression $\hat{p}_{i,j} = p(x_i, y_j) - p_{i,j}$ (d) dans un domaine carré périodique de résolution 40×40 à $t=1$.

5.1.3.2 Extrapolation près d'un bord irrégulier

Près d'un bord irrégulier, nous écrivons, en utilisant l'exemple et les conventions de la figure 4.9 que l'on rappelle ici :

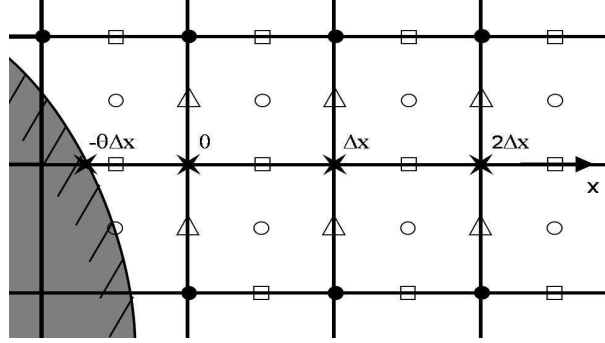


FIG. 5.11 – Position du champ ψ près d'un bord irrégulier sur la grille MAC

$$\begin{cases} \psi^n(-\theta\Delta x) = \psi^n(0) - \theta\Delta x\psi_x^n(0) + \frac{\theta^2\Delta x^2}{2}\psi_{xx}^n(0) - \frac{\theta^3\Delta x^3}{6}\psi_{xxx}^n(0) + O(\Delta x^4) \\ \psi^n(\Delta x) = \psi^n(0) + \Delta x\psi_x^n(0) + \frac{\Delta x^2}{2}\psi_{xx}^n(0) + \frac{\Delta x^3}{6}\psi_{xxx}^n(0) + O(\Delta x^4) \\ \psi^n(2\Delta x) = \psi^n(0) + 2\Delta x\psi_x^n(0) + 2\Delta x^2\psi_{xx}^n(0) + \frac{8}{6}\Delta x^3\psi_{xxx}^n(0) + O(\Delta x^4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi^n(-\theta\Delta x) = -\frac{(\theta+2)(\theta+1)(\theta-3)}{6}\psi^n(0) + \frac{\theta(\theta^2-4)}{3}\psi^n(\Delta x) - \frac{\theta(\theta^2-1)}{6}\psi^n(2\Delta x) - \frac{(\theta+2)(\theta+1)}{6}\Delta x^2\psi_{xx}^n(0) + O(\Delta x^4) \quad (5.9)$$

le terme ψ_{xx}^0 peut par ailleurs être calculé en utilisant : (4.33)

$$\psi_{xx}^n(0) = \frac{(\frac{4}{3} - \theta^2)\psi^n(\Delta x) + \frac{1}{2}(\theta^2 - \frac{1}{3})\psi^n(2\Delta x) + \frac{1}{2}(\theta^2 - \frac{7}{3})\psi^n(0) - \Delta x\psi_x^n(0)}{(\frac{1}{3} + \theta + \frac{\theta^2}{2})\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

C'est tout ce dont nous avons besoin pour implémenter le test de Guermond-Shen dans une cellule carrée en présence d'une inclusion circulaire. Les résultats de convergence sont présentés par ligne respectivement les champs ϕ , ψ , u et p et par colonnes respectivement les normes $l^2(L^2)$, $l^2(L^\infty)$ et $l^2(H^1)$ sur leur domaine respectif.

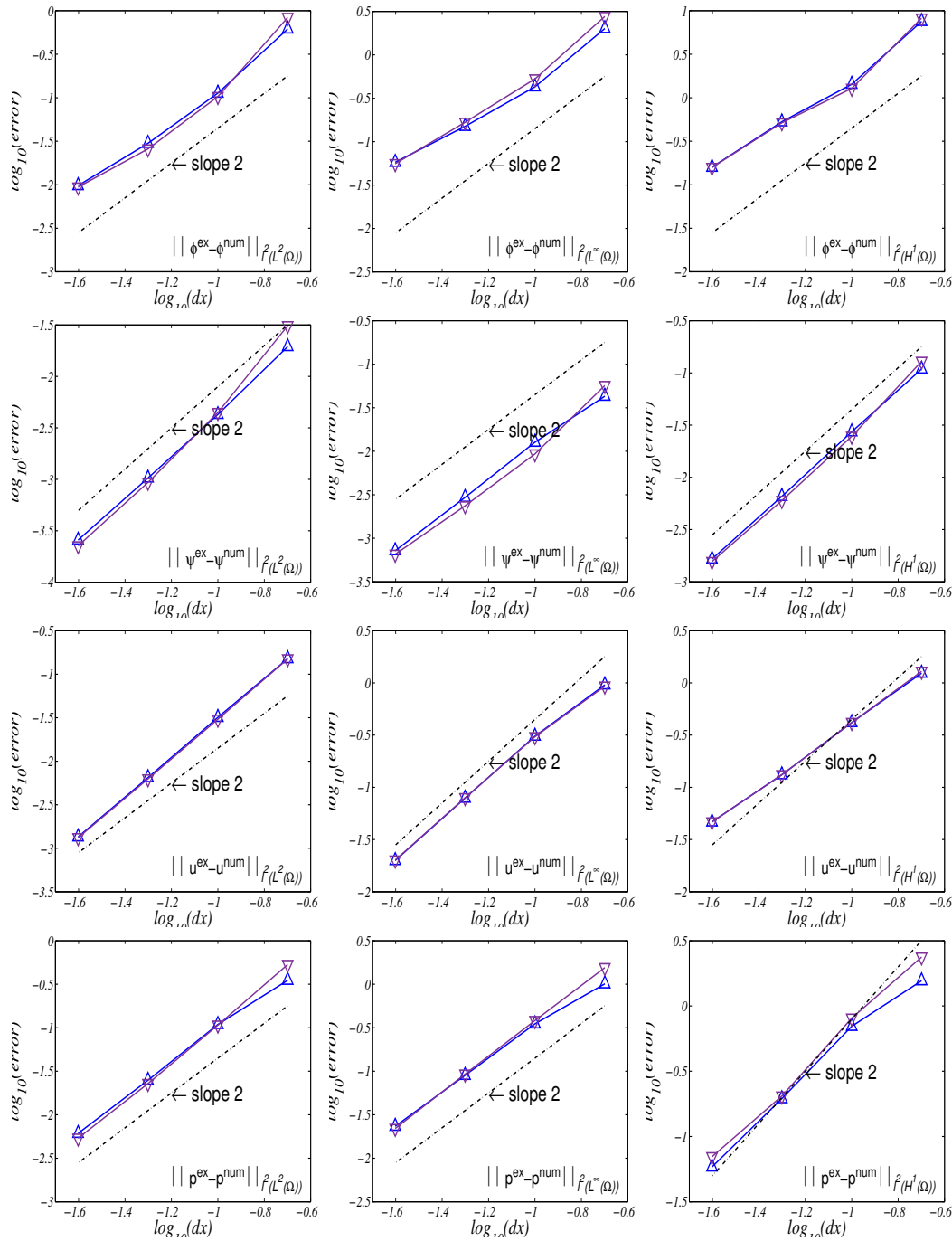


FIG. 5.12 – Études de convergence pour le cas de l'implémentation de $\Delta_h \psi$ sur Ω_ϕ avec des conditions de Dirichlet : représenté par ligne respectivement les champs ϕ , ψ , u et p et par colonnes respectivement les normes $l^2(L^2)$, $l^2(L^\infty)$ et $l^2(H^1)$ sur leur domaine respectif. Légendes : (Δ) $n=2$ linéaire Neumann et (∇) $n=2$ linéaire Dirichlet.

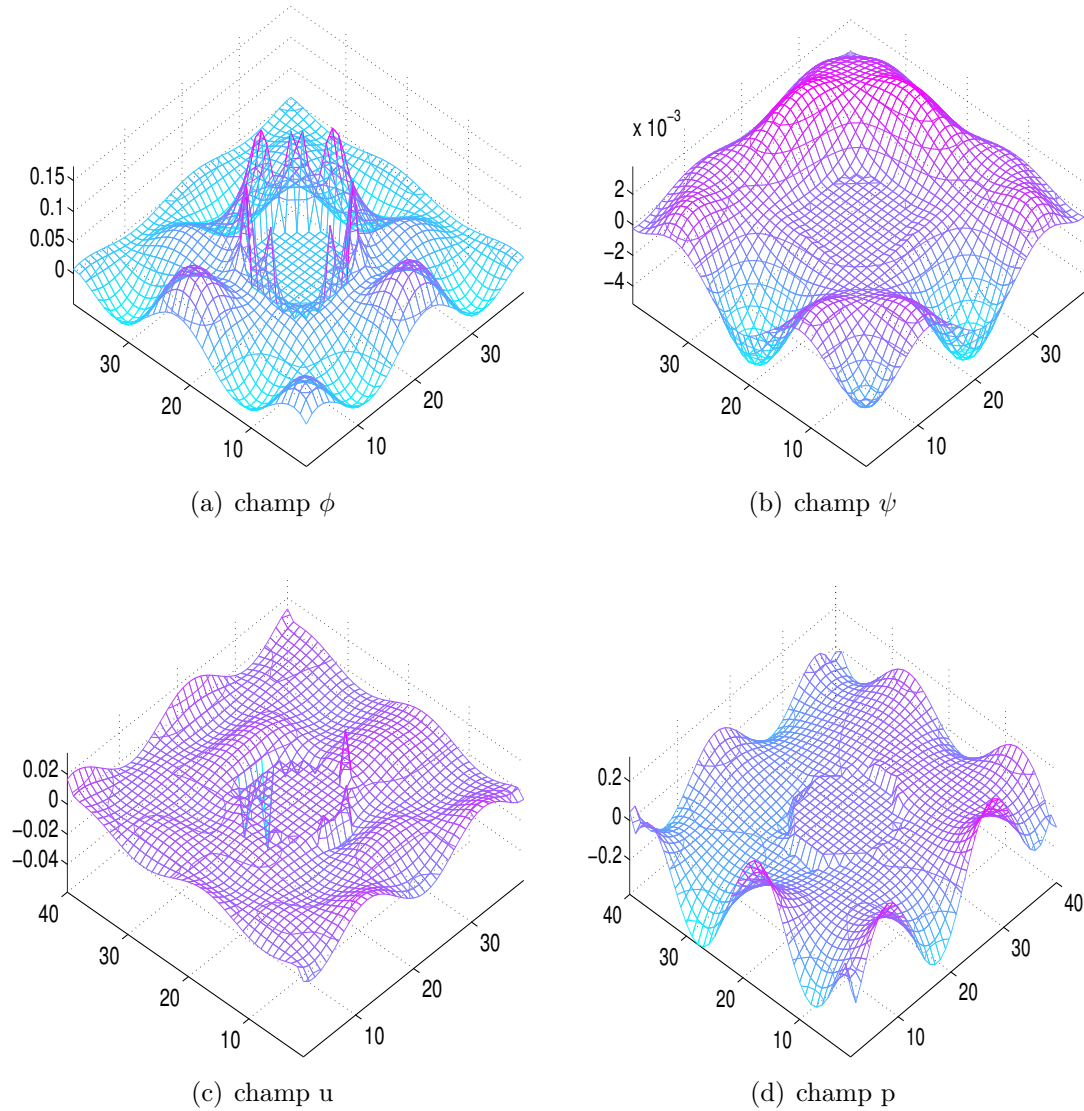


FIG. 5.13 – Représentation spatiale de l'erreur relative des champs $\hat{\phi}_{i,j} = \phi(x_i, y_j) - \phi_{i,j}$ (a), $\hat{\psi}_{i,j} = \psi(x_i, y_j) - \psi_{i,j}$ (b), de la composante du champ de vitesse $\hat{u}_{i,j} = u(x_i, y_j) - u_{i,j}$ (c) et du champ de pression $\hat{p}_{i,j} = p(x_i, y_j) - p_{i,j}$ (d) dans un domaine carré périodique de résolution 40×40 à $t=1$. Le cas représenté correspond à la configuration où $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$ est implémenté avec une condition de Dirichlet et sur le bord de la particule nous avons choisi l'extrapolant *linéaire Neumann*

5.2 Discussion

Nous regardons dans cette section comment pourrait s'écrire une analyse de convergence des algorithmes utilisés.

Le problème que l'on cherche à résoudre est :

$$\psi_t = \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi - \phi \quad \text{sur } \Omega \setminus \partial\Omega \times]0, T] \quad (5.10a)$$

$$\psi(t=0) = \psi_0 \quad \text{sur } \Omega \quad (5.10b)$$

$$\nabla \psi = \nabla \psi_b \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T] \quad (5.10c)$$

$$\rho \Delta \phi = \nabla \times \mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega \setminus \partial\Omega \quad (5.10d)$$

Notons que l'équation (5.10a) ressemble à une équation de la chaleur avec pour terme source le champ ϕ .

Le schéma numérique que nous avons implémenté s'écrit pour tout n :

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \Delta_h \psi^n - \phi^n \quad \text{sur } \Omega_\phi \quad (5.11a)$$

$$\psi^0 = \psi_0 \quad \text{sur } \Omega_\phi \quad (5.11b)$$

$$\rho \Delta_h \phi^n = \nabla_h \times f^n \quad \text{sur } \Omega_\phi \quad (5.11c)$$

$$\phi^n = \frac{\mu}{\rho} \Delta_h \psi^n - \frac{\psi(t^{n+1}) - E(\psi^n)}{\Delta t} \quad \text{sur } \partial\Omega_\phi \quad (5.11d)$$

La condition de Dirichlet sur ψ apparaît explicitement dans l'équation (5.11d). La condition de Neumann est cachée dans les expressions utilisées pour calculer Δ_h .

En utilisant les notations introduites au chapitre 4 la solution du problème (5.11c) et (5.11d) peut être écrite sous la forme :

$$\phi^n = \mathcal{D}_0^{-1} \left(\phi_b \left(\psi^n, \nabla \psi(t^n), \frac{\psi(t^{n+1}) - E(\psi^n)}{\Delta t} \right) \right) \quad (5.12)$$

L'extrapolant ϕ_b a trois arguments : (i) le champ ψ^n qui est à valeur dans Ω_ϕ , (ii) la condition aux limites $\nabla \psi(t^n)$ à valeur dans $\partial\Omega_\phi$ (iii) et un troisième argument $\frac{1}{\Delta t}(\psi(t^{n+1}) - E(\psi^n))$ à valeurs dans $\partial\Omega_\phi$. Pour simplifier l'écriture des équations suivantes, nous noterons :

$$\mathcal{P}_\psi^{-1}(\psi^n) \equiv \mathcal{D}_0^{-1} \left(\phi_b \left(\psi^n, \nabla \psi(t^n), \frac{\psi(t^{n+1}) - E(\psi^n)}{\Delta t} \right) \right)$$

L'indice ψ rappelle que l'opérateur \mathcal{P}_ψ^{-1} dépend des valeurs analytiques de ψ au

bord, à différents temps (t^n et t^{n+1}), mais aussi de ses gradients. L'algorithme (5.11a) s'écrit alors :

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \Delta_h \psi^n - \mathcal{P}_\psi^{-1}(\psi^n) \quad (5.13)$$

Nous commençons par estimer l'erreur de troncature en remplaçant dans l'égalité (5.13) la solution numérique ψ^n par la solution exacte $\psi(t^n)$. Notons :

$$\varepsilon^n = -\frac{\psi(t^{n+1}) - \psi(t^n)}{\Delta t} - \frac{\mu}{\rho} \Delta_h \psi(t^n) - \mathcal{P}_\psi^{-1}(\psi(t^n)) \quad (5.14)$$

Chacun de ces termes représente des erreurs que nous avons déjà étudiées. La discrétisation en temps est évidemment d'ordre $O(\Delta t)$:

$$\psi_t(t^n) = \frac{\psi(t^{n+1}) - \psi(t^n)}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (5.15)$$

Le terme laplacien

$$\Delta \psi(t^n) = \Delta_h \psi(t^n) + \varepsilon^\Delta(\psi^n) \quad (5.16)$$

a une erreur de troncature ε^Δ qui dépend des expressions utilisées au bord. Enfin, le dernier terme correspond précisément à l'erreur qui provient de l'inversion du problème de Poisson (5.11c), les conditions de bord étant fournies par différents extrapolants :

$$\phi(t^n) = \mathcal{P}_\psi^{-1}(\psi(t^n)) + \varepsilon^\mathcal{P}(\phi^n, \psi^n) \quad (5.17)$$

En remplaçant les équations (5.15), (5.16) et (5.17) dans (5.14), nous obtenons :

$$\varepsilon^n = O(\Delta t) + \varepsilon^\Delta(\psi^n) + \varepsilon^\mathcal{P}(\phi^n, \psi^n) \quad (5.18)$$

Notons aussi que l'opérateur \mathcal{P}_ψ^{-1} vérifie la propriété suivante. Étant donné deux champs discrets ψ_1^n et ψ_2^n , $\mathcal{P}_\psi^{-1}(\psi_1^n) - \mathcal{P}_\psi^{-1}(\psi_2^n)$ est la solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta_h \phi^n &= 0 & \text{sur } \Omega_\phi \\ \phi^n &= \frac{\mu}{\rho} \Delta_h (\psi_1^n - \psi_2^n) - \frac{E(\psi_1^n - \psi_2^n)}{\Delta t} & \text{sur } \partial\Omega_\phi \end{cases} \quad (5.19)$$

qui est analogue au problème \mathcal{P}_ψ , mais pour lequel il n'y a pas de sources, et où tout les gradients et valeurs du champ ψ sont nuls au bord. Nous noterons

$$\mathcal{P}_\psi^{-1}(\psi_1^n) - \mathcal{P}_\psi^{-1}(\psi_2^n) = \mathcal{P}_0^{-1}(\psi_1^n - \psi_2^n)$$

cette solution.

Grâce à cette propriété, il est facile d'obtenir un système d'équations couplées régissant l'erreur numérique $\widehat{\psi}^n = \psi(t^n) - \psi^n$. À partir des équations (5.13), (5.14) et (5.18), il vient :

$$\frac{\widehat{\psi}^{n+1} - \widehat{\psi}^n}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \Delta_h \widehat{\psi}^n + \mathcal{P}_0^{-1}(\widehat{\psi}^n) + \varepsilon^n \quad (5.20)$$

On voit que l'erreur vérifie un problème qui ressemble au problème d'Euler avec en plus un bruit ε^n . À ce stade, cependant, nous ne savons aller plus loin, d'autant plus que notre étude numérique a montré que la stabilité de l'algorithme est fortement dépendante des détails de l'implémentation des problèmes de Poisson au bord, c'est à dire des détails de l'opérateur \mathcal{P}_0^{-1} résultant. Nous sommes donc face à un problème mathématique que nous laissons aux experts de ce type d'analyse, et ne pouvons nous appuyer que sur nos tests numériques pour tester la convergence de nos algorithmes. Pour fixer le pas de temps, dans tous nos tests, nous avons fixé empiriquement un critère CFL tel que $\Delta t = 0.16 \Delta x \Delta y$

5.3 Dynamique des constantes

Nous avons vu dans le chapitre 2 que la fonction de courant ψ n'est connue qu'à une constante près sur chaque composante connexe du bord $\partial\Omega$. Jusqu'à présent, nous avons omis cette difficulté, en faisant comme si ces constantes étaient connues. Nous revenons maintenant sur ce problème.

Rappelons d'abord que le problème de Poisson pour ϕ —voir section 2.3—se présente sous la forme :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \rho \Delta \phi &= \nabla \times \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \phi &= \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi - (\widetilde{\psi}_t + c_t^\alpha) & \text{sur } \partial\Omega^\alpha \end{cases} \quad (5.21)$$

où $\widetilde{\psi} = \int_0^s \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$, est intégré à partir d'un origine arbitraire sur chaque composante connexe $\partial\Omega^\alpha$ du bord. On a vu qu'on pouvait décomposer ce problème par linéarité, en notant ϕ_0 la solution de

$$(\mathcal{S}_0) \begin{cases} \rho \Delta \phi &= \nabla \times \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \phi &= \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi - \widetilde{\psi}_t & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.22)$$

et en écrivant pour chaque contour $\alpha \in [1, m]$ le système (\mathcal{S}_α) :

$$(\mathcal{S}_\alpha) \begin{cases} \rho \Delta \phi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \phi = -1 & \text{sur } \partial\Omega_\alpha. \end{cases} \quad (5.23)$$

La solution de (S) s'écrit alors sous la forme :

$$\phi = \phi_0 + \sum_{\alpha=1}^m c_t^\alpha \phi_\alpha \quad (5.24)$$

Nous avons passé le chapitre précédent à comprendre comment résoudre le problème (\mathcal{S}_0) . Les problèmes (\mathcal{S}_α) sont des problèmes de Poisson plus simples, dont la résolution a été décrite au début du chapitre 4, section 4.1.1.

L'évaluation des constantes c_t^α fera intervenir des intégrales de contour de la forme :

$$\sum_{\alpha=1}^m c_t^\alpha \underbrace{\oint_{\partial\Omega_\alpha} n \cdot \nabla \phi_\alpha}_{=a_{\alpha,\beta}} = \underbrace{\oint_{\partial\Omega_\alpha} t \cdot f - \oint_{\partial\Omega_\alpha} n \cdot \nabla \phi_0}_{=b_\alpha}$$

pour obtenir le système matriciel suivant

$$\forall \beta, \quad \sum_{\alpha=1}^m c_t^\alpha a_{\alpha,\beta} = b_\beta \quad (5.25)$$

Nous voyons que la solution (5.24) du problème (\mathcal{S}) ne fait pas intervenir les valeurs intégrées en temps des constantes c^α . Par contre, une difficulté supplémentaire apparaît quand on cherche à faire intervenir un terme de la forme $\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t}$ dans la condition de Dirichlet pour ϕ afin de forcer la valeur de $\psi(t^{n+1})$ au bord, comme expliqué section 5.1.3. En effet ce terme doit être construit à partir de $\psi(t^{n+1})$ connu analytiquement au bord, et d'une extrapolation à partir des valeurs de ψ^n dans le domaine discret. Pour comparer $\tilde{\psi}(t^{n+1})$ à des champs discret il faut être capable d'en écrire une extrapolation qui fait intervenir aussi bien ψ^n sur Ω_ϕ que les constantes $c^{\alpha,n}$ elles-mêmes. On calculera les valeurs de $c^{\alpha,n}$ par un simple pas

d'Euler pour discrétiser (\mathcal{S}_0) sous la forme :

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \Delta_h \psi^n - \phi^n \quad \text{sur } \Omega_\phi \quad (5.26a)$$

$$\psi^0 = \psi_0 \quad \text{sur } \Omega_\phi \quad (5.26b)$$

$$\rho \Delta_h \phi^n = \nabla_h \times f^n \quad \text{sur } \Omega_\phi \quad (5.26c)$$

$$\phi^n = \frac{\mu}{\rho} \Delta_h \psi^n - \frac{\tilde{\psi}(t^{n+1}) - E(\psi^n) - c^{\alpha,n}}{\Delta t} \quad \text{sur } \partial\Omega_\phi \quad (5.26d)$$

Remarquons qu'une erreur commise sur $c^{\alpha,n}$ pollue la solution de (5.26) par la solution de (\mathcal{S}_α) . Ces erreurs sont automatiquement corrigées à travers le calculs des poids c_t^α qui garantissent que les contraintes $\oint t \cdot (\nabla^\perp \phi - \mathbf{f}) = \mathbf{0}$ soient vérifiées. En d'autres termes, une erreur uniforme sur $\partial\Omega_\phi \cap \partial\Omega^\alpha$ dans la condition de bord de (5.26) n'affectent en rien la valeur résultante de ϕ^n . La résolution numérique est donc largement insensible au calcul de $c^{\alpha,n}$.

Par contre, si on souhaite vraiment connaître les valeurs des constantes $c^{\alpha,n}$ leur intégration par un pas d'Euler peut-être sensible aux détails de l'implémentation. Nous avons ainsi trouvé dans certains cas des instabilités numériques par exemple $\Delta_h \psi$ implémenté avec une condition de Dirichlet dans Ω_ϕ et des conditions mixtes *Dirichlet-Neumann* pour sa valeur extrapolée sur $\partial\Omega_\phi$ (voir figure 5.15). Il est remarquable qu'alors même que ces constantes divergent, les profils des champs ψ^n sont tout à fait consistants avec la solution espérée. Cela illustre la robustesse de cette décomposition par linéarité du problème (\mathcal{S}) .

5.3.1 Cas d'un canal périodique

Le premier cas test que nous nous proposons d'étudier reprend l'étude de la section 3.2.1 (test de Guermond et Al. [29]) en modifiant les conditions de bord qui deviennent périodique dans la direction y . Les deux parois rigides Γ_{-1} et Γ_1 définissent le nouveau contour du domaine Ω_ϕ . Pour introduire des valeurs au bord $\tilde{\psi}$ différentes de ψ , nous choisissons une fonction $c(t)$ arbitraire : $c(t) = \sin(t)$. Afin de mieux utiliser la symétrie du problème, nous écrivons $\tilde{\psi} = \psi + \frac{\varepsilon}{2}c(t)$ sur chaque bord Γ_ε .

La décomposition précédente fait apparaître deux sous systèmes. On note :

$$\phi_0 \text{ solution du système } \begin{cases} \Delta_h \phi_0 = \nabla \times f & \text{dans } \Omega_\phi \\ \phi_b = \Delta_h \psi - \tilde{\psi}_t & \text{au bords.} \end{cases} \quad (5.27)$$

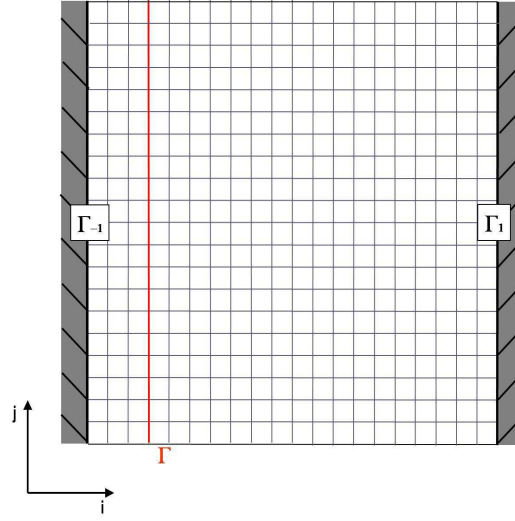


FIG. 5.14 – Domaine carré périodique avec des bords réguliers.

et

$$\phi_1 \text{ solution du système } \begin{cases} \Delta_h \phi_1 = 0 & \text{dans } \Omega_\phi \\ \phi_b = +1/2 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \phi_b = -1/2 & \text{sur } \Gamma_{-1} \end{cases} \quad (5.28)$$

On sait que

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \oint_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{f}$$

d'où

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_0 + c_t \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_1 = \oint_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{f}$$

ce qui donne

$$c_t = \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{f} - \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_0}{\oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_1}$$

C'est tout dont nous avons besoin pour implémenter la résolution numérique.

Comme dans la section 5.1.2, sur Ω_ϕ , $\Delta_h \psi$ peut être discrétisé près d'un bord (mais sur Ω_ϕ) soit en utilisant une condition de Neumann ou soit en utilisant une condition de Dirichlet. Nous verrons que cela impacte différemment la stabilité de la solution numérique c^n obtenue par intégration d'un pas d'Euler.

Nous comparons figures 5.15 les valeurs de c^n obtenues en utilisant différentes mé-

thodes d'extrapolation pour calculer l'extrapolant $\Delta_h \psi^n$ au bord. On voit que l'évolution de la constante du problème est très sensible aux choix du calcul de $\Delta_h \psi$. Sur la figure 5.15-gauche, $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$ est implémenté avec une condition de type Neumann. Pour tous les extrapolants utilisés, la dynamique de c^n est stable et converge vers la solution numérique. Sur la figure 5.15-droite, $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$ est implémenté avec une condition de type Dirichlet, nous trouvons que pour plusieurs extrapolants, notre schéma ne reproduit pas les valeurs de $c(t)$. Lorsque l'on utilise les extrapolants de type Neumann-Dirichlet (équations (4.21) et (4.24) de la section 4.2), l'évolution de c^n est instable. Sur la figure 5.16-gauche, on reproduit pour ces deux cas les profils des champs de vitesse au milieu du canal. On constate qu'ils sont tout à fait consistant avec le résultat escompté et donc parfaitement insensible à l'évolution de c^n .

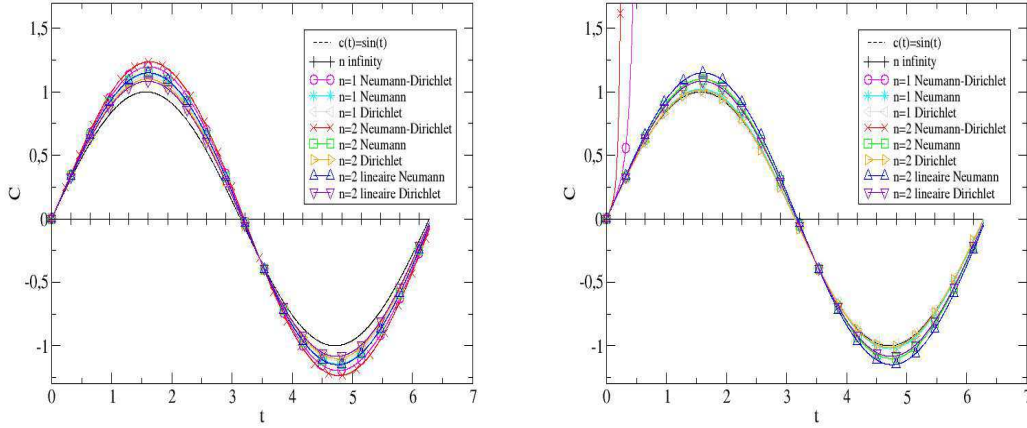


FIG. 5.15 – Étude de la dynamique de la constante $C(t)$: à gauche $\Delta_h \psi$ est implémenté avec une condition de Neumann, à droite avec une condition de Dirichlet sur Ω_ϕ

Sur la figure 5.16-droite, $\Delta_h \psi$ est calculé avec une condition de Dirichlet sur Ω_ϕ et en utilisant un extrapolant de type Neumann d'ordre 2 sur $\partial\Omega_\phi$. Nous avons mis en évidence l'influence de la résolution dans la précision de la constante c^n .

Nous présentons figure 5.17 les résultats de convergence en utilisant une condition de Dirichlet pour $\Delta_h \psi$ sur Ω_ϕ et sur la figures 5.18 les résultats de convergence en utilisant une condition de Neumann. Ces résultats sont présentés par ligne respectivement pour les champs ϕ , ψ , u et p et par colonnes respectivement pour les normes $l^2(L^2)$, $l^2(L^\infty)$ et $l^2(H^1)$. On voit que pour tous ces champs et pour toutes les normes suivant les différents choix d'implémentation la convergence est d'ordre 2.

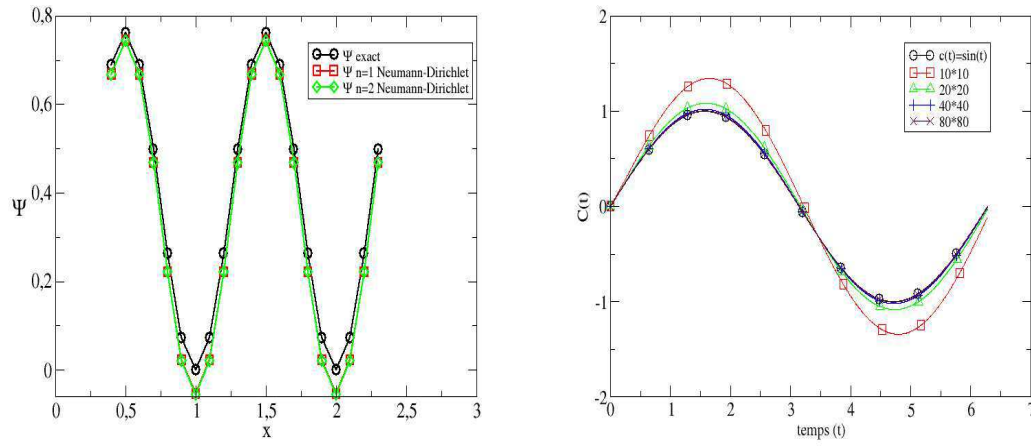


FIG. 5.16 – A gauche : coupe du champ ψ en i pour une résolution 20×20 à $t = 1$ pour le cas $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$ avec une condition de dirichlet. A droite : Etude de la dynamique de $c(t)$ pour le cas $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$ avec une condition de dirichlet et sur $\partial\Omega_\phi$ nous avons choisi l'extrapolant $n=2$ Neumann

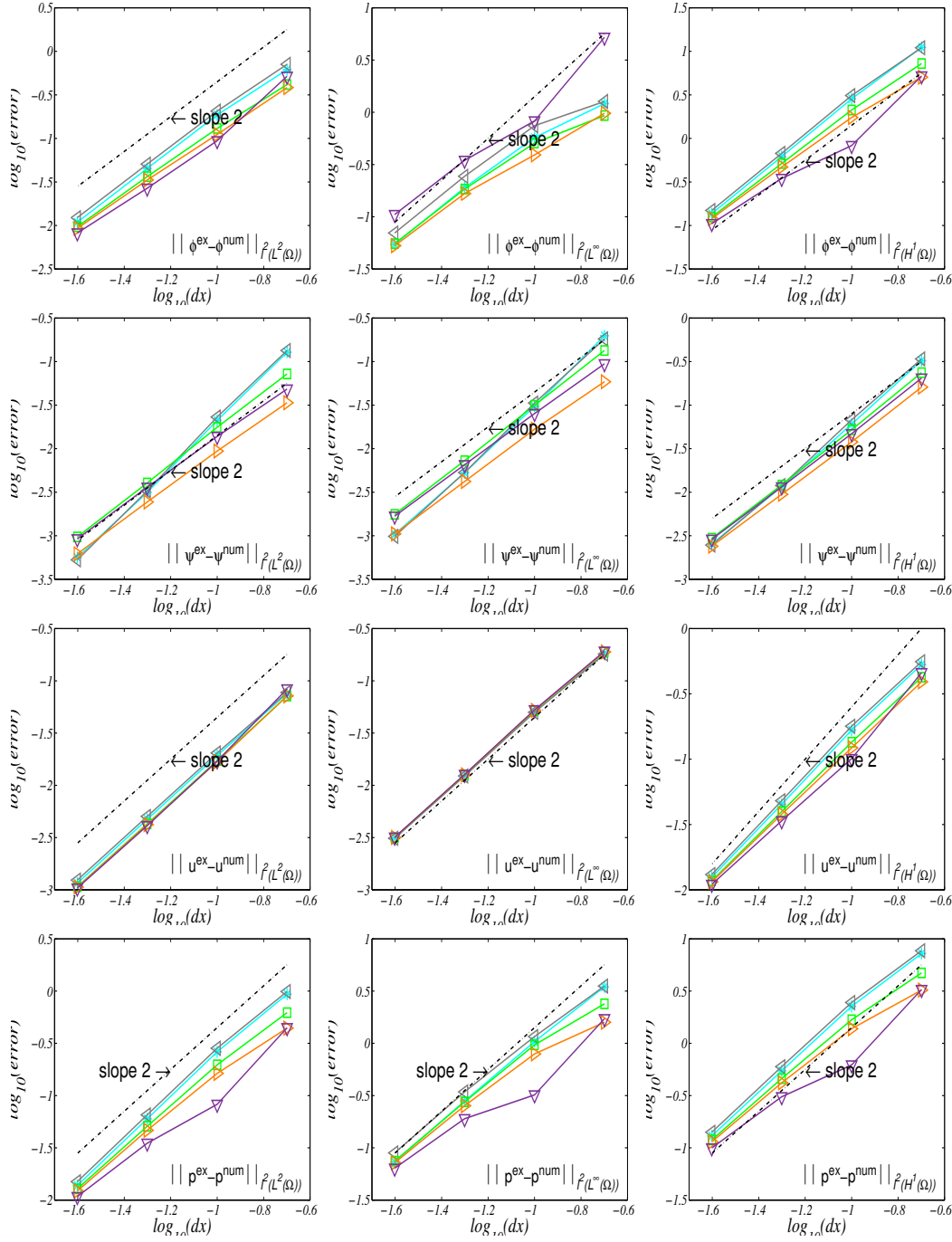


FIG. 5.17 – Études de convergence pour le cas de l'implémentation de $\Delta_h \psi$ sur Ω_ϕ avec des conditions de Dirichlet : représenté par ligne respectivement les champs ϕ , ψ , u et p et par colonnes respectivement les normes $l^2(L^2)$, $l^2(L^\infty)$ et $l^2(H^1)$ sur leur domaine respectif. Légendes : (*) $n=1$ Neumann, (<) $n=1$ Dirichlet, (□) $n=2$ Neumann, (>) $n=2$ Dirichlet, (△) $n=2$ linéaire Neumann et (▽) $n=2$ linéaire Dirichlet.

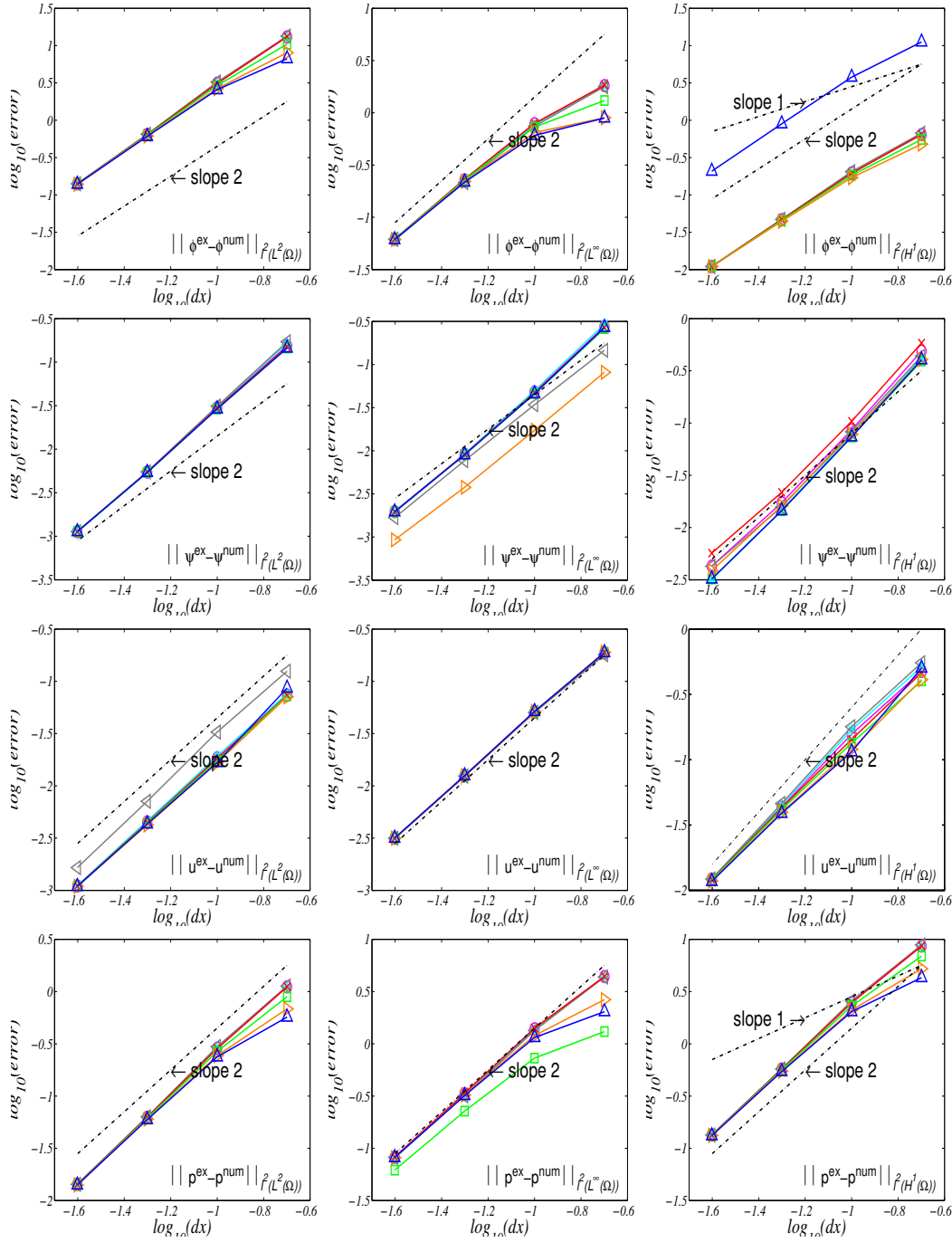


FIG. 5.18 – Études de convergence pour le cas de l'implémentation de $\Delta_h \psi$ sur Ω_ϕ avec des conditions de Neumann : représenté par ligne respectivement les champs ϕ , ψ , u et p et par colonnes respectivement les normes $\ell^2(L^2)$, $\ell^2(L^\infty)$ et $\ell^2(H^1)$ sur leur domaine respectif. Légendes : (\circ) $n=1$ Neumann-Dirichlet, ($*$) $n=1$ Neumann, (\triangleleft) $n=1$ Dirichlet, (\times) $n=2$ Neumann-Dirichlet, (\square) $n=2$ Neumann, (\triangleright) $n=2$ Dirichlet, (\triangle) $n=2$ linéaire Neumann et (∇) $n=2$ linéaire Dirichlet

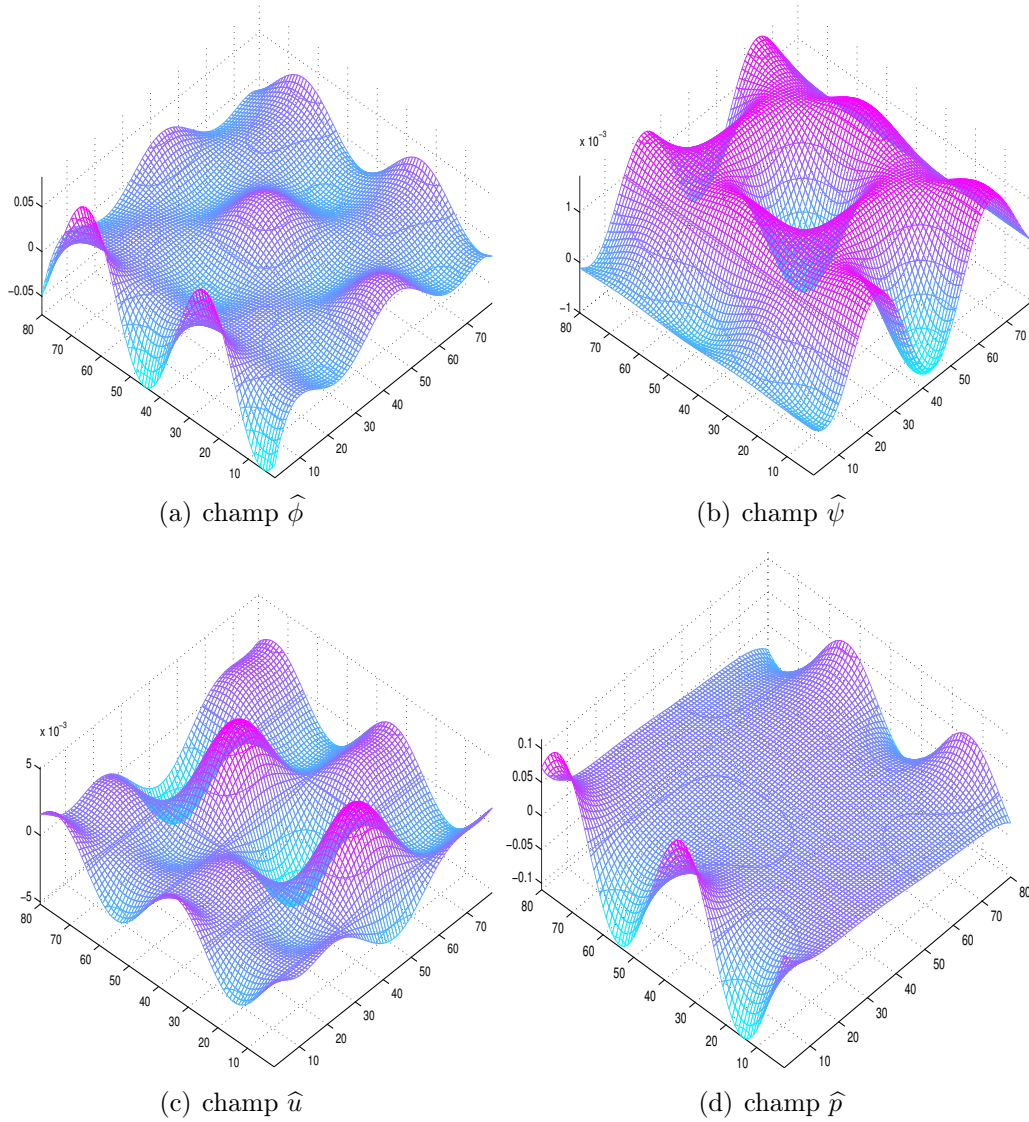


FIG. 5.19 – Représentation spatiale de l'erreur relative des champs $\hat{\phi}_{i,j} = \phi(x_i, y_j) - \phi_{i,j}$ (a), $\hat{\psi}_{i,j} = \psi(x_i, y_j) - \psi_{i,j}$ (b), de la composante du champ de vitesse $\hat{u}_{i,j} = u(x_i, y_j) - u_{i,j}$ (c) et du champ de pression $\hat{p}_{i,j} = p(x_i, y_j) - p_{i,j}$ (d) dans un domaine carré périodique de résolution 80×80 à $t=1$. Le cas représenté correspond à la configuration où $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$ est implémenté avec une condition de dirichlet et sur $\partial\Omega_\phi$ nous avons choisi l'extrapolant $n=2$ Neumann

5.3.2 Cas d'une particule dans un domaine carré

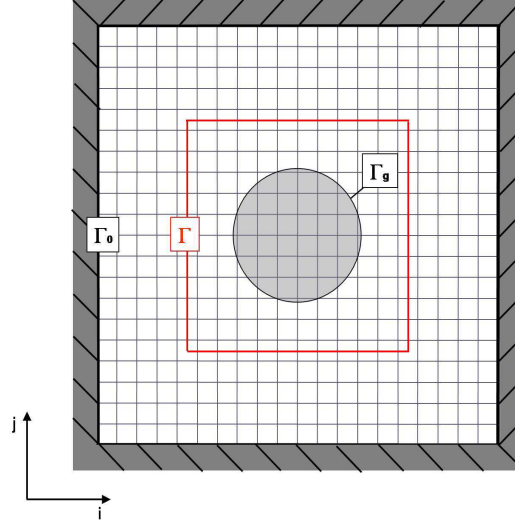


FIG. 5.20 – Domaine carré avec des bords régulier avec une particule.

Comme dans la section 5.1.3.2, nous utiliserons les solutions du test de Guermond et al. [29], on définit par Γ_0 le contour du domaine carré, par Γ_g le contour du bord de la particule et par Γ un contour fermé arbitraire autour de cette particule. Pour introduire des valeurs au bord $\tilde{\psi}$ différentes de ψ , nous choisissons une fonction $c(t)$ arbitraire $c(t) = \sin(t)$ et écrivons sur Γ_1 , $\tilde{\psi} = \psi + c(t)$. Il suffit d'écrire cette fonction sur un seul contour car ψ est construite à une constantes près.

La décomposition de ce système fait intervenir deux sous systèmes dont on peut trouver une solution, on note :

$$\phi_0 \text{ solution du système } \begin{cases} \Delta\phi_0 = \nabla \times f & \text{dans } \Omega \\ \phi_b = \Delta\psi - \tilde{\psi}_t & \text{sur } \Gamma_g. \end{cases} \quad (5.29)$$

et

$$\phi_1 \text{ solution du système } \begin{cases} \Delta\phi_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \phi_b = 1 & \text{sur } \Gamma \\ 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (5.30)$$

La valeur de la constante est fixée par la relation

$$\oint \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \oint \mathbf{t} \cdot \mathbf{f}$$

qui s'écrit sur tout contour Γ arbitraire entourant la particule :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_0 + \dot{c} \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_1 = \oint_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{f}$$

ce qui donne

$$\dot{c} = \frac{\oint_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{f} - \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_0}{\oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_1}$$

Dans les résultats présentés sur la figure 5.21, la discrétisation de $\Delta_h \psi$ près du mur est imposé avec une condition de Neumann, sur Γ_1 il n'y a pas de problème de constante. Près du grain, comme nous l'avons vu section 4.2.2.2, nous avons deux extrapolation possibles qui utilisent $\Delta_h \psi$ dans le fluide soit avec une condition de Neumann soit avec une condition de Dirichlet. Ces résultats sont présentés par ligne respectivement pour les champs ϕ , ψ , u et p et par colonnes respectivement pour les normes $l^2(L^2)$, $l^2(L^\infty)$ et $l^2(H^1)$. On voit que si pour les champs ψ et u la convergence est d'ordre 2 est atteinte pour les normes $l^2(L^2)$, $l^2(L^\infty)$ et $l^2(H^1)$ pour les champs ϕ et p nous avons un ordre 3/2

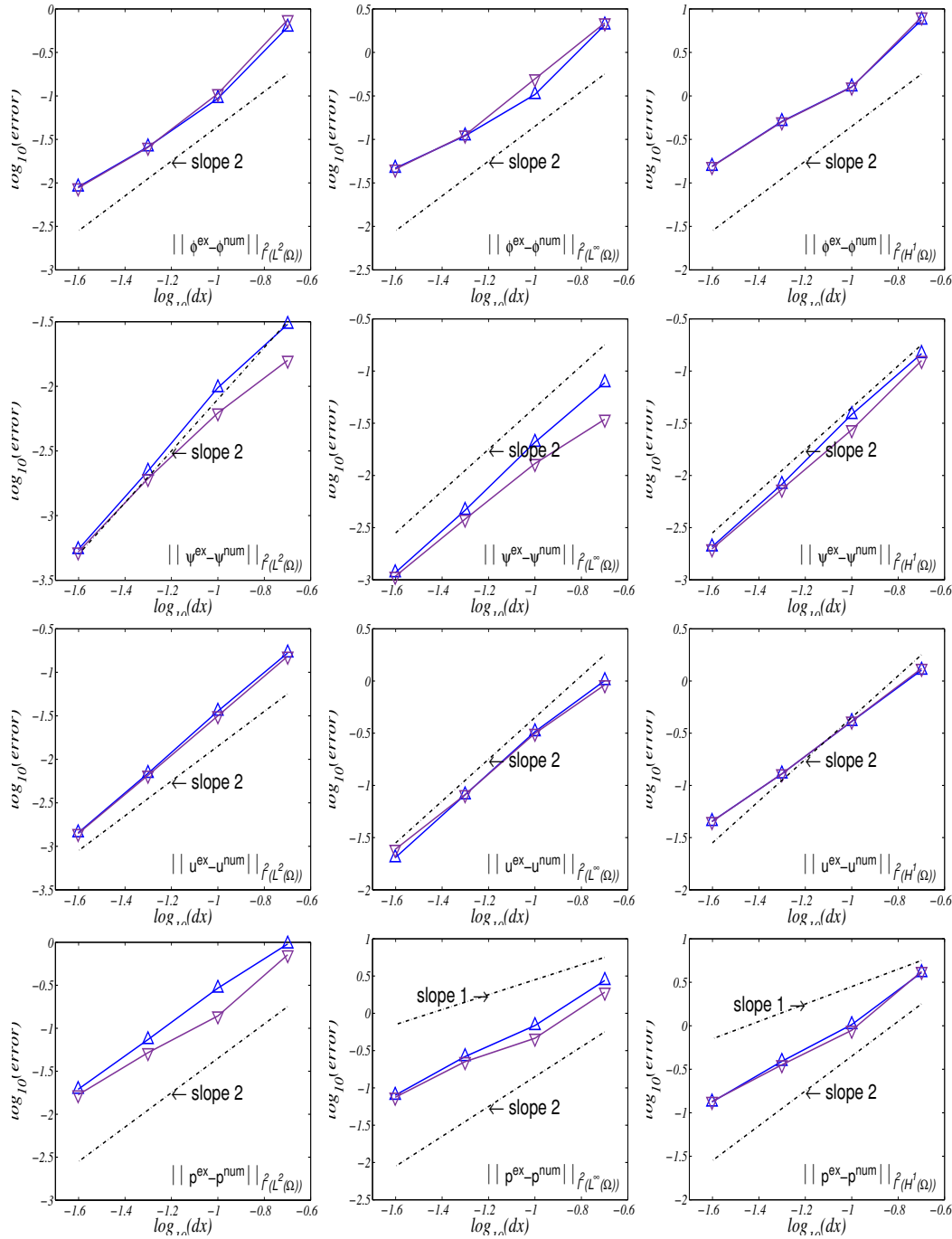


FIG. 5.21 – Études de convergence pour le cas de l'implémentation de $\Delta_h \psi$ sur Ω_ϕ avec des conditions de Neumann : représenté par ligne respectivement les champs ϕ , ψ , u et p et par colonnes respectivement les normes $\ell^2(L^2)$, $\ell^2(L^\infty)$ et $\ell^2(H^1)$ sur leur domaine respectif. Légendes : (\triangle) $n=2$ linéaire Neumann et (∇) $n=2$ linéaire Dirichlet.

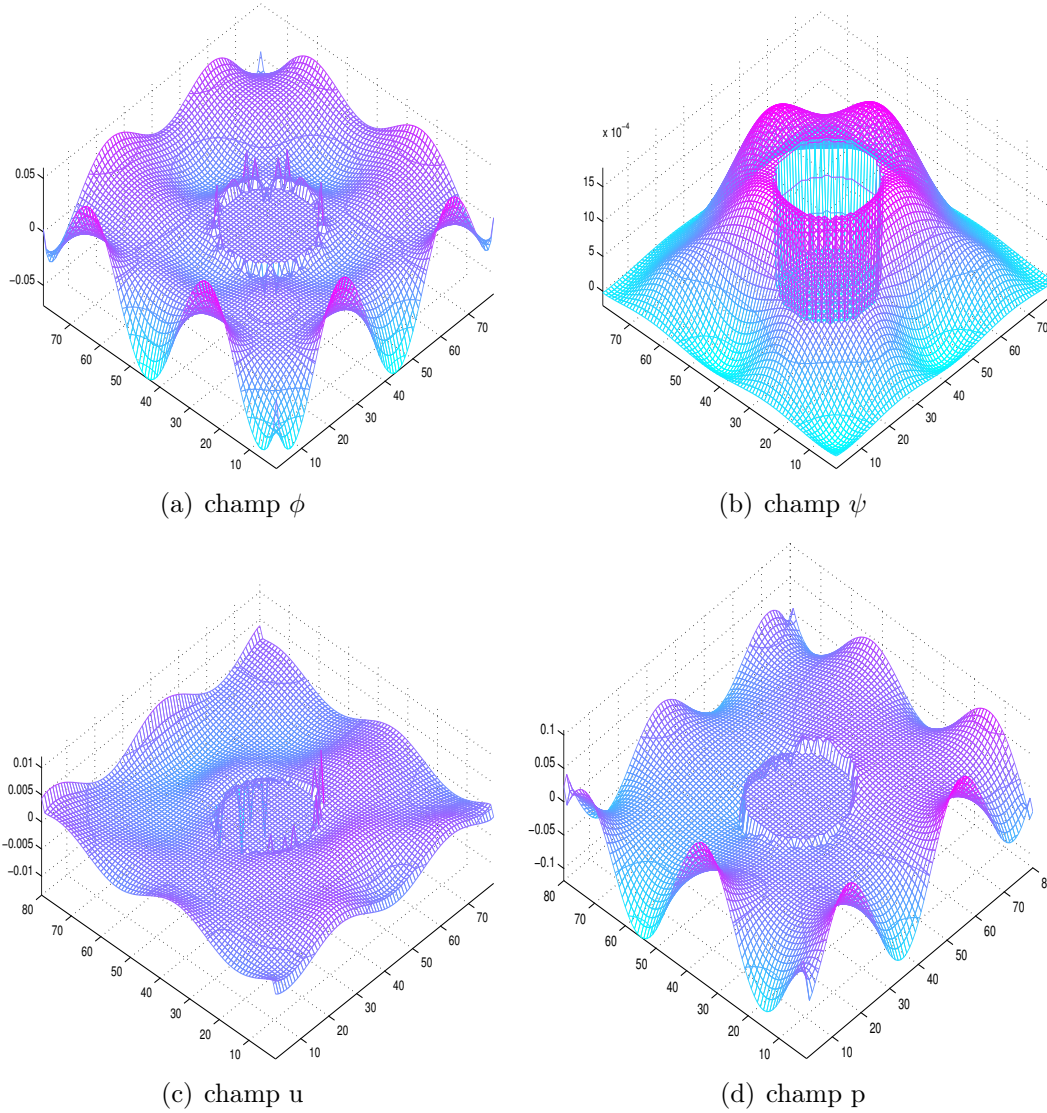


FIG. 5.22 – Représentation spatiale de l'erreur relative des champs $\hat{\phi}_{i,j} = \phi(x_i, y_j) - \phi_{i,j}$ (a), $\hat{\psi}_{i,j} = \psi(x_i, y_j) - \psi_{i,j}$ (b), de la composante du champ de vitesse $\hat{u}_{i,j} = u(x_i, y_j) - u_{i,j}$ (c) et du champ de pression $\hat{p}_{i,j} = p(x_i, y_j) - p_{i,j}$ (d) dans un domaine carré périodique de résolution 80×80 à $t=1$. Le cas représenté correspond à la configuration où $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$ est implémenté avec une condition de dirichlet et sur $\partial\Omega_\phi$ nous avons choisi l'extrapolant $n=2$ *Neumann*

5.3.3 Cas d'une particule dans un canal périodique

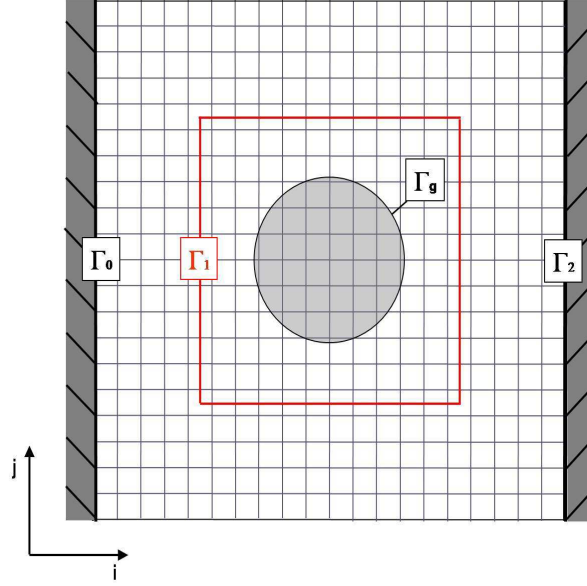


FIG. 5.23 – Domaine périodique avec particules.

Le dernier cas test que nous nous proposons, consiste à immerger une particule dans un canal périodique dans la direction y . Les deux parois rigides Γ_0 et Γ_2 définissent le nouveau contour du domaine Ω_ϕ , on définit par Γ_g le contour du bord de la particule et par Γ_1 un contour fermé arbitraire autour de cette particule. Comme dans la section 3.2.1, nous utiliserons les solutions du test de Guermond et al. [29]. Pour introduire des valeurs au bord $\tilde{\psi}$ différentes de ψ , nous choisissons deux fonctions $c_1(t)$ et $c_2(t)$ arbitraires $c_1(t) = c_2(t) = \sin(t)$ et écrivons sur Γ_1 , $\tilde{\psi} = \psi + c_1(t)$ et sur Γ_2 , $\tilde{\psi} = \psi + c_2(t)$. Il suffit d'écrire cette fonction sur un seul contour car ψ est construite à une constantes près.

La décomposition de ce système fait intervenir trois sous systèmes dont on peut trouver une solution, on note :

$$\phi_0 \text{ solution du système } \begin{cases} \Delta\phi_0 = \nabla \times f & \text{dans } \Omega \\ \phi_b = \Delta\psi - \tilde{\psi}_t & \text{sur } \Gamma_g. \end{cases} \quad (5.31)$$

$$\phi_1 \text{ solution du système} \quad \begin{cases} \Delta\phi_1 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \phi_b = 1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (5.32)$$

et

$$\phi_2 \text{ solution du système} \quad \begin{cases} \Delta\phi_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ \phi_b = 1 & \text{sur } \Gamma_2 \\ 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (5.33)$$

ici

$$\phi = \phi_0 - \dot{c}_1\phi_1 - \dot{c}_2\phi_2 \quad (5.34)$$

On sait que

$$\oint n \cdot \nabla \phi = \oint t \cdot f$$

par linéarité de la solution cela implique que

$$\begin{aligned} \oint n \cdot \nabla \phi_0 - \dot{c}_1 \oint n \cdot \nabla \phi_1 - \dot{c}_2 \oint n \cdot \nabla \phi_2 &= \oint t \cdot f \\ \Rightarrow \dot{c}_1 \oint n \cdot \nabla \phi_1 + \dot{c}_2 \oint n \cdot \nabla \phi_2 &= \oint n \cdot \nabla \phi_0 - \oint t \cdot f \end{aligned}$$

On note $\gamma_{i,j} = \oint_{\Gamma_i} n \cdot \nabla \phi_j$

$$\begin{cases} \dot{c}_1 \gamma_{1,1} + \dot{c}_2 \gamma_{1,2} = \oint_{\Gamma_1} n \cdot \nabla \phi_0 - \oint_{\Gamma_1} t \cdot f = \beta_1 \\ \dot{c}_1 \gamma_{2,1} + \dot{c}_2 \gamma_{2,2} = \oint_{\Gamma_2} n \cdot \nabla \phi_0 - \oint_{\Gamma_2} t \cdot f = \beta_2 \end{cases}$$

ce qui nous donne le système à résoudre

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{c}_1 = -\frac{\beta_1 \gamma_{2,2} - \beta_2 \gamma_{1,2}}{\gamma_{2,1} \gamma_{1,2} - \gamma_{1,1} \gamma_{2,2}} \\ \dot{c}_2 = \frac{\beta_1 \gamma_{2,1} - \beta_2 \gamma_{1,1}}{\gamma_{2,1} \gamma_{1,2} - \gamma_{1,1} \gamma_{2,2}} \end{cases}$$

Dans les résultats présentés sur la figure 5.24, la discrétisation de $\Delta_h \psi$ près du mur est imposé avec une condition de Neumann, sur Γ_0 il n'y a pas de problème de constante. Près du grain, comme nous l'avons vu section 4.2.2.2, nous avons deux extrapolations possibles qui utilisent $\Delta_h \psi$ dans le fluide soit avec une condition de Neumann soit avec une condition de Dirichlet, nous utiliseront uniquement la

condition de Neumann. Ces résultats sont présentés par ligne respectivement pour les champs ϕ , ψ , u et p et par colonnes respectivement pour les normes $l^2(L^2)$, $l^2(L^\infty)$ et $l^2(H^1)$. On voit que si pour les champs ψ et u la convergence est d'ordre 2 est atteinte pour les normes $l^2(L^2)$, $l^2(L^\infty)$ et $l^2(H^1)$ pour les champs ϕ et p nous avons un ordre $3/2$

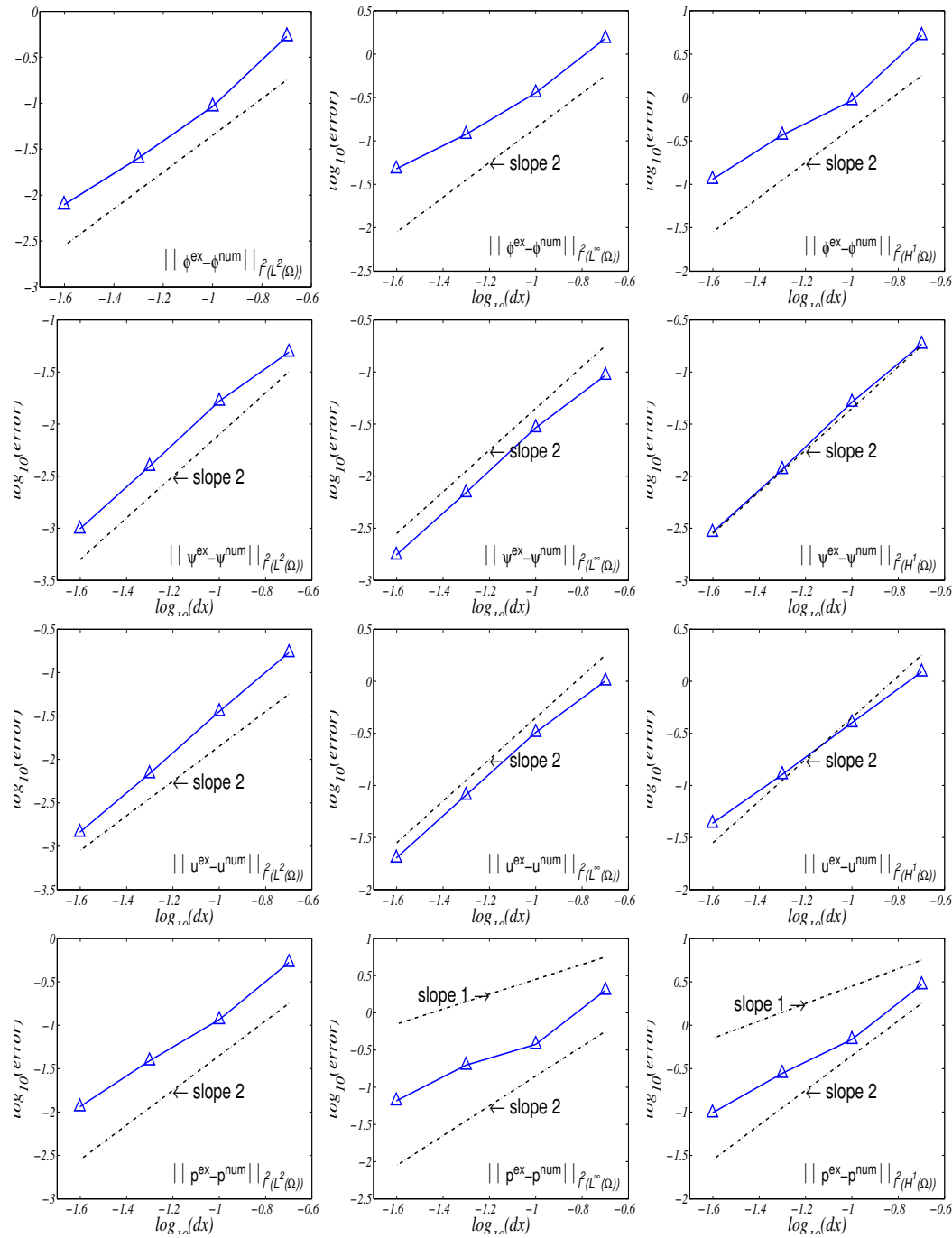


FIG. 5.24 – Études de convergence pour le cas de l'implémentation de $\Delta_h \psi$ sur Ω_ϕ avec des conditions de Neumann : représenté par ligne respectivement les champs ϕ , ψ , u et p et par colonnes respectivement les normes $l^2(L^2)$, $l^2(L^\infty)$ et $l^2(H^1)$ sur leur domaine respectif. Légendes : (\triangle) $n=2$ linéaire Neumann.

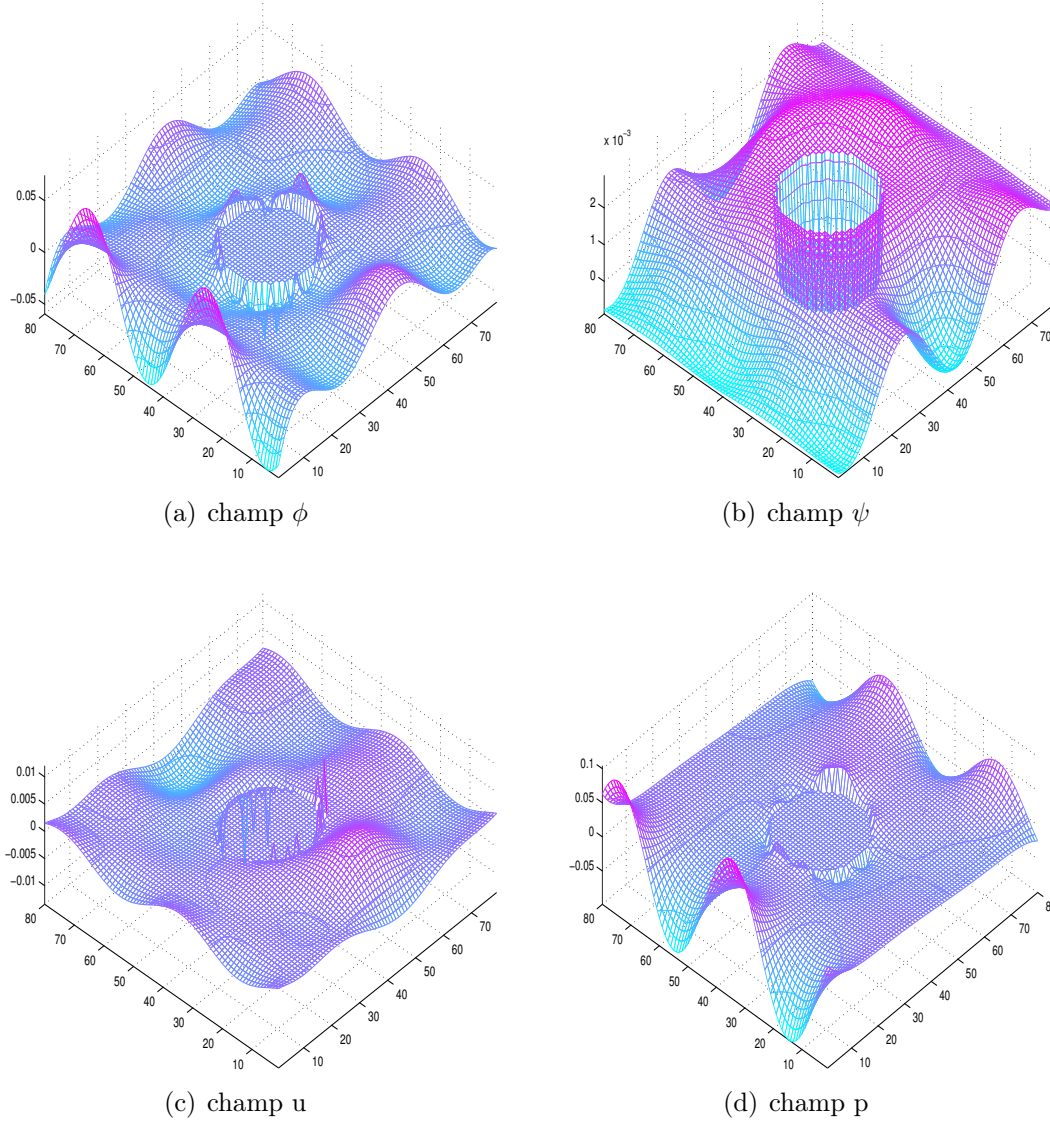


FIG. 5.25 – Représentation spatiale de l'erreur relative des champs $\widehat{\phi}_{i,j} = \phi(x_i, y_j) - \phi_{i,j}$ (a), $\widehat{\psi}_{i,j} = \psi(x_i, y_j) - \psi_{i,j}$ (b), de la composante du champ de vitesse $\widehat{u}_{i,j} = u(x_i, y_j) - u_{i,j}$ (c) et du champ de pression $\widehat{p}_{i,j} = p(x_i, y_j) - p_{i,j}$ (d) dans un domaine carré périodique de résolution 80×80 à $t=1$. Le cas représenté correspond à la configuration où $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$ est implémenté avec une condition de dirichlet et sur $\partial\Omega_\phi$ nous avons choisi l'extrapolant $n=2$ Neumann

5.4 Conclusion

La méthode $\phi - \psi$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\psi_t &= \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi - \phi && \text{sur } \Omega \setminus \partial\Omega \times]0, T] \\ \psi(t=0) &= \psi_0 && \text{sur } \Omega \\ \nabla \psi &= \nabla \psi_b && \text{sur } \partial\Omega \times]0, T] \\ \rho \Delta \phi &= \nabla \times \mathbf{f} && \text{sur } \Omega \setminus \partial\Omega\end{aligned}$$

Nous avons proposé une première discrétisation de ce problème sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} &= \frac{\mu}{\rho} \Delta_h \psi^n - \phi^n && \text{sur } \Omega_\phi \\ \psi^0 &= \psi_0 && \text{sur } \Omega_\phi \\ \rho \Delta_h \phi^n &= \nabla_h \times f^n && \text{sur } \Omega_\phi \\ \phi^n &= \frac{\mu}{\rho} \Delta_h \psi^n - \psi_t^{ex} && \text{sur } \partial\Omega_\phi\end{aligned}$$

Nous avons vu section 5.1.2 que ce schéma présente des difficultés liées au contrôle des conditions aux limites sur ψ . En effet, selon les extrapolants utilisés pour calculer $\Delta\psi$ au bord, certaines conditions aux limites ne sont pas garanties (voir tableau 5.1).

Conditions aux limites		Ordre de convergence suivant les normes											
$\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$	$\Delta_h \psi _{\Gamma_{-1} \cap \Gamma_1}$	$l^2(L^2(\Omega_\phi))$				$l^2(L^\infty(\Omega_\phi))$				$l^2(H^1(\Omega_\phi))$			
Dirichlet	n=1 Neumann-Dirichlet	ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p
	n=1 Neumann	1.6	2.1	2.2	1.8	1.0	2.0	1.7	0.8	1.3	2.0	1.6	1.3
	n=1 Dirichlet	1.6	2.2	2.0	0.7	1.0	2.1	1.7	0.0	1.1	2.0	1.7	0.4
	n=2 Neumann-Dirichlet	0	0.7	0.5	0	0.0	0.5	0	0	0	0.5	0	0
	n=2 Neumann	1.7	1.9	2.0	2.0	1.5	2.1	1.8	1.7	1.7	2.0	1.6	1.7
	n=2 Dirichlet	2.5	2.7	2.5	2.4	2.1	2.2	2.3	2.2	2.1	2.5	2.0	1.9
	n=2 linéaire Dirichlet	0	0	0	1	0	0	0	0.6	0	0	0	0.5
	n=2 linéaire Dirichlet	0	0	0	1	0	0	0	0.3	0	0	0	0.2
Neumann	n=1 Neumann-Dirichlet	1.8	1.5	2.3	1.6	1.5	2.1	2.1	0.7	1.5	2.3	1.8	1.2
	n=1 Neumann	1.0	0.5	0.6	1.4	0.5	1.1	0	0.6	0.5	0.7	1.8	1.0
	n=1 Dirichlet	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	n=2 Neumann-Dirichlet	1.9	2.0	2.2	1.6	1.9	2.0	2.1	1.5	1.9	2.2	1.8	1.5
	n=2 Neumann	1.8	2.0	1.3	2.4	1.8	2.0	1.0	3.4	1.8	1.3	0.4	2.0
	n=2 Dirichlet	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	n=2 linéaire Neumann	1.0	2.3	1.2	1.0	1.0	1.8	1.0	0.7	1.0	1.3	0.4	0.7
	n=2 linéaire Neumann	1.0	2.3	1.2	1.0	1.0	1.8	1.0	0.7	1.0	1.3	0.4	0.7

TAB. 5.1 – Résumé des résultats de convergence dans le cas d'un domaine carré périodique sans inclusion (figure 5.14) avec soit une condition de Neumann soit de Dirichlet sur $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$, au bord ψ_t est connu de façon analytique et on ne prend pas en compte les constantes d'intégration.

Section 5.1.3 nous avons vu qu'il était possible de forcer la condition de Dirichlet sur ψ , en réécrivant une nouvelle discrétisation sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{n+1}-\psi^n}{\Delta t} &= \frac{\mu}{\rho} \Delta_h \psi^n - \phi^n && \text{sur } \Omega_\phi \\ \psi^0 &= \psi_0 && \text{sur } \Omega_\phi \\ \rho \Delta_h \phi^n &= \nabla_h \times f^n && \text{sur } \Omega_\phi \\ \phi^n &= \frac{\mu}{\rho} \Delta_h \psi^n - \frac{\psi(t^{n+1})-E(\psi^n)}{\Delta t} && \text{sur } \partial\Omega_\phi \end{aligned}$$

Les résultats de convergence de ce schéma sont rassemblés sous forme de tableau pour le cas sans inclusion dans le tableau 5.2. Nous donnons les pentes calculées numériquement à partir des courbes de convergences. Dans le tableau 5.3, nous avons compilés les résultats de convergence pour le cas avec inclusion (figure 4.3b). Dans ce cas nous avons arbitrairement choisis de fixer une condition sur la parois du domaine en utilisant un extrapolant linéaire de type Dirichlet. Nous avons des ordres de convergence en espace d'ordre 2 pour toutes les normes, sauf pour la norme $l^2(H^1)$ des champs de vitesse et de pression, qui semble d'ordre 1.5.

Conditions aux limites		Ordre de convergence suivant les normes											
$\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$	$\Delta_h \psi _{\text{parois}}$	$l^2(L^2(\Omega_\phi))$				$l^2(L^\infty(\Omega_\phi))$				$l^2(H^1(\Omega_\phi))$			
		ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p
N e u m a n	n=1 Neumann-Dirichlet	2	2.1	2.1	2.1	1.8	2.1	2	1.7	1.9	2.1	1.7	1.8
	n=1 Neumann	2	2.2	2.1	2	1.7	2.2	2	1.4	1.6	2.2	1.6	1.4
	n=1 Dirichlet	1.8	2.3	2.1	1.6	1.1	2.1	1.8	1.1	1.4	2.1	1.7	1.2
	n=2 Neumann-Dirichlet	2	2.1	2.1	2.2	1.8	2.1	2	2	2.2	2.1	1.7	2
	n=2 Neumann	2	2	2.1	2.1	1.7	2	2	1.9	2	2.1	1.7	1.9
	n=2 Dirichlet	1.7	2	2	1.7	1.5	2.1	1.9	1.6	1.8	2	1.6	1.6
	n=2 linéaire Neumann	1.9	2.1	2.2	2	1.6	2	2	1.8	1.9	2.2	1.8	1.8
	n=2 linéaire Dirichlet	2	2	2.1	1.9	1.8	2.1	1.9	1.7	1.9	2.1	1.7	1.7

TAB. 5.2 – Résumé des résultats de convergence dans le cas d'un domaine carré sans inclusion (figure 4.3a) avec une condition de Neumann sur $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$ et sans prise en compte des constantes d'intégration.

Nous avons discuté, section 5.2, de la consistance de notre schéma, et nous avons mis en évidence la difficulté de faire une étude de stabilité de ce schéma.

Ce chapitre se termine sur l'étude de l'implémentation de la méthode $\phi-\psi$ avec cette fois-ci la prise en compte la dynamique des constantes. Dans le tableau (5.4), nous résumons les résultats obtenus dans la cas d'un canal périodique sans inclusion (voir figure 5.14). Nous avons étudié ce cas, suivant que $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$ fasse intervenir soit une condition de Neumann soit de Dirichlet près des parois (Γ_{-1} et Γ_{-1}). Cette étude se

Conditions aux limites		Ordre de convergence suivant les normes											
$\Delta_h \psi _{\text{paroi}}$	$\Delta_h \psi _{\text{inclusion}}$	$l^2(L^2(\Omega_\phi))$				$l^2(L^\infty(\Omega_\phi))$				$l^2(H^1(\Omega_\phi))$			
n=2 linéaire Dirichlet	n=2 linéaire Neumann n=2 linéaire Dirichlet	ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p
		1.9	2.1	2.1	1.8	1.7	1.8	1.9	1.8	1.8	1.8	1.6	1.6
		2.1	2.3	2.3	1.9	1.9	2	1.9	2	1.9	2	1.6	1.7

TAB. 5.3 – Résumé des résultats de convergence dans le cas d'un domaine carré avec une inclusion (figure 4.3b) avec une condition faisant intervenir un extrapolant linéaire de type Dirichlet sur les parois du domaine Ω_ϕ et sans prise en compte des constantes d'intégration.

conclut par la convergence d'ordre 2 du schéma avec des cas instables (représentés par des "X").

Conditions aux limites		Ordre de convergence suivant les normes											
$\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$	$\Delta_h \psi _{\Gamma_{-1} \cap \Gamma_1}$	$l^2(L^2(\Omega_\phi))$				$l^2(L^\infty(\Omega_\phi))$				$l^2(H^1(\Omega_\phi))$			
Dirichlet	n=1 Neumann-Dirichlet	ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p
	n=1 Neumann	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	n=1 Dirichlet	1.9	2.6	2.0	2	1.7	2.5	1.8	1.9	2.1	2.3	2.0	1.9
	n=2 Neumann-Dirichlet	1.9	2.6	2.0	2	1.7	2.5	1.8	1.8	2.1	2.4	2.0	1.9
	n=2 Neumann	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	n=2 Dirichlet	1.8	2	2.0	1.9	1.6	2.1	1.7	1.7	1.9	2.1	2.0	1.8
	n=2 linéaire Dirichlet	1.8	1.9	2.0	1.8	1.6	1.9	1.7	1.7	1.8	2	2.0	1.7
	n=2 linéaire Dirichlet	2	1.9	2.1	1.8	1.9	1.9	1.8	1.7	1.9	2	2.0	1.7
Neumann	n=1 Neumann-Dirichlet	2.1	2.3	2.0	2.1	1.8	2.4	2.0	1.9	2.0	2.3	1.9	2.0
	n=1 Neumann	2.1	2.3	2.0	2.1	1.8	2.4	2.0	1.9	2.0	2.3	1.9	2.0
	n=1 Dirichlet	2.1	2.3	2.1	2.1	1.8	2.1	2.0	1.9	2.0	2.2	1.9	2.0
	n=2 Neumann-Dirichlet	2.1	2.3	2.0	2.1	1.8	2.4	2.0	1.9	2.0	2.2	1.8	2.0
	n=2 Neumann	2.0	2.3	2.0	2	1.6	2.3	2.0	1.7	1.9	2.3	1.8	1.9
	n=2 Dirichlet	2.0	2.3	2.0	2	1.6	2.1	2.0	1.7	1.8	2.2	1.8	1.9
	n=2 linéaire Neumann	1.9	2.3	2.1	1.9	1.6	2.4	2.0	1.7	1.9	2.3	1.8	1.8
	n=2 linéaire Neumann	1.9	2.3	2.1	1.9	1.6	2.4	2.0	1.7	1.9	2.3	1.8	1.8

TAB. 5.4 – Résumé des résultats de convergence dans le cas d'un domaine carré périodique sans inclusion (figure 5.14) avec soit une condition de Neumann soit de Dirichlet sur $\Delta_h \psi(\Omega_\phi)$ et avec prise en compte des constantes d'intégration.

Dans le tableau 5.5, nous présentons les résultats de convergence pour le cas illustré sur la figure 5.20 d'une inclusion dans un domaine carré borné. Sur la paroi Γ_0 du domaine, nous avons choisi l'extrapolant *n=2 linéaire Dirichlet*.

Dans le tableau 5.6, nous présentons les résultats de convergence pour le cas illustré sur la figure 5.23 d'une inclusion dans un domaine carré périodique. Sur les paroi Γ_0 et Γ_2 du domaine, nous avons également choisi l'extrapolant *n=2 linéaire Dirichlet*.

Conditions aux limites		Ordre de convergence suivant les normes											
$\Delta_h \psi _{\Gamma_0}$	$\Delta_h \psi _{\Gamma_g}$	$l^2(L^2(\Omega_\phi))$				$l^2(L^\infty(\Omega_\phi))$				$l^2(H^1(\Omega_\phi))$			
n=2 linéaire Dirichlet	n=2 linéaire Neumann n=2 linéaire Dirichlet	ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p
		1.9	1.9	2.3	1.8	1.8	2.0	2.0	1.7	1.9	2.0	1.6	1.6
		1.8	1.8	2.3	1.9	1.9	1.8	2.0	1.6	1.9	2.0	1.6	1.6

TAB. 5.5 – Résumé des résultats de convergence dans le cas d'un domaine carré avec une inclusion (figure 5.20) avec une condition faisant intervenir un extrapolant linéaire de type Dirichlet sur les parois du domain Ω_ϕ et avec prise en compte des constantes d'intégration.

Conditions aux limites		Ordre de convergence suivant les normes											
$\Delta_h \psi _{\Gamma_0 \cap \Gamma_2}$	$\Delta_h \psi _{\Gamma_g}$	$l^2(L^2(\Omega_\phi))$				$l^2(L^\infty(\Omega_\phi))$				$l^2(H^1(\Omega_\phi))$			
n=2 linéaire Dirichlet	n=2 linéaire Neumann	ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p	ϕ	ψ	u	p
		1.9	2.0	2.3	1.8	1.7	2.0	2.0	1.6	1.9	2.0	1.6	1.7

TAB. 5.6 – Résumé des résultats de convergence dans le cas d'un domaine carré périodique (figure 5.23) avec une inclusion avec une condition faisant intervenir un extrapolant linéaire de type Dirichlet sur les parois du domain Ω_ϕ et avec prise en compte des constantes d'intégration.

Chapitre 6

Méthode hybride

Sommaire

6.1	De la difficulté à implémenter une méthode de projection	133
6.2	Le problème de Neumann	136
6.2.1	Paires orientées et segments	137
6.2.2	Discrétisation sur une grille régulière	139
6.2.3	Près d'un bord irrégulier	143
6.2.4	Validations numériques du Solveur Poisson Neumann . . .	146
6.3	Extrapolants pour le champ de vorticité	148
6.3.1	Près de bords réguliers	148
6.3.2	Près d'une interface irrégulières	151
6.4	Dynamique de la méthode hybride	159
6.4.1	Etude dans un domaine régulier	160
6.4.2	Etude dans un domaine borné carré avec une inclusion . .	163
6.4.3	Forçage de la condition de Dirichlet sur ψ	166
6.5	Conclusions	172

Les chapitres précédents ont été consacrés à l'élaboration et à l'implémentation de la méthode ϕ - ψ . Cette formulation potentielle du problème de Stokes (ou Navier-Stokes) nous a permis de contourner certaines difficultés posées par les méthodes de projection. Nous sommes ainsi parvenu à écrire un algorithme capable de traiter en différences finies des conditions d'interfaces rigides non-conforme au maillage, tout en garantissant convergence d'ordre 2 pour les champs du problèmes, y compris près des bords.

Cette méthode a néanmoins beaucoup d'inconvénients : son usage est limité aux écoulements bidimensionnels ; elle nécessite de résoudre plusieurs problèmes elliptiques, selon le nombre de “trous” dans le domaine Ω ; et il faut encore implémenter un petit problème matriciel afin de trouver les constantes apparaissant dans les équations (2.16). Toutes ces difficultés semblent découler de l'utilisation de la fonction de courant, et clairement, on souhaiterait pouvoir revenir à la forme ordinaire des équations de (Navier)-Stokes, tout en s'inspirant de ce qu'on a appris.

Quand on s'interroge alors sur les raisons précises qui ont permis d'obtenir de bons résultats de convergence avec la méthode ϕ - ψ , on est pourtant bien en peine de formuler une réponse précise. Bien sûr, travailler avec la fonction de courant garantit l'incompressibilité du champ de vitesse. Mais le champ de pression physique—pas seulement celui qui est utilisé comme multiplicateur de Lagrange dans les méthodes de projection—sert aussi, en principe, à garantir l'incompressibilité du champ de vitesse. Y aurait-il alors quelque chose de fondamental dans la formulation ϕ - ψ , par rapport à l'écriture usuelle de (Navier)-Stokes ? On se souvient que les méthodes de projection se heurtent à la multiplicité des conditions de bord vérifiées par la pression, dès lors que l'on cherche p comme solution d'une équation de Poisson avec des conditions fortes. Mais si l'on dérive l'équation (2.12), par exemple, on voit que le gradient de ϕ , lui aussi, est prescrit au bord, et donc le problème reste analogue. Clairement, une simple réécriture du problème de Stokes ne suffit pas à en réduire la difficulté. Mais alors, pourquoi cette formulation nous a-t-elle permis de progresser et quelle conclusions en tirer ?

En fait, cette reformulation nous a surtout permis de faire un progrès technique. L'avantage majeur de l'écriture ϕ - ψ a été en effet de faire apparaître une condition de Dirichlet, dont l'implémentation en résolution sous-grille était techniquement possible. Rappelons que nous avons dû nous appuyer sur des travaux récents de Jomaa et al [38] et Gibou et Fedkiw [23] et que, ce faisant, le traitement des conditions de bord restait particulièrement délicat, toute la difficulté étant de le discrétiser sous une forme qui soit compatible avec les conditions de bord physiques à un ordre

suffisant.

On comprend en lisant E et Liu [16], par exemple, mais aussi Botella [6] ou encore Gresho et Sani [27], que dans les méthodes de projection, l'équation de Poisson pour p , est souvent résolue avec des conditions de Poisson qui ne sont pas physiques. Ainsi, on trouve dans la littérature des schémas numérique dont les conditions de bord s'écrivent sous la forme $\vec{n} \cdot \nabla p = 0$ en lieu en place de (7). Cet usage est en partie lié à l'absence de méthode permettant de traiter un problème de type Poisson-Neumann avec des conditions de bord quelconques. Nous y répondrons par une méthode inspirée des méthodes "volumes of fluid" [33] ou "LS-STAG" [7, 65]. On verra qu'elle s'apparente à une formulation faible du problème, même si nous ne saurons pas l'exprimer sous la forme habituelle qui apparaît par exemple en éléments finis (forme variationnelle).

6.1 De la difficulté à implémenter une méthode de projection

On rappelle les équations de Stokes incompressible :

$$\rho \mathbf{u}_t = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (6.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6.1b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad (6.1c)$$

Partant de (6.1), les méthodes de projection cherchent à écrire un algorithme faisant intervenir deux étapes :

1. une première étape de prédiction :

$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \mu \Delta \mathbf{u}^* = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.2)$$

2. une seconde étape de projection :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \\ \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.3)$$

Partant de cette formulation, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour inverser (6.3) [6, 45], souvent en résolvant directement le problème de Poisson asso-

cié [12, 64] :

$$\begin{cases} \Delta p^{n+1} = \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \\ \nabla p^{n+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.4)$$

Mais dès lors que l'on a écrit (6.3), on a fait apparaître une condition de bord inconsistante pour la pression. Puisque partant de Stokes, on doit avoir :

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = -(\partial_t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega$$

On pourrait chercher à implémenter directement une méthode numérique pour résoudre :

$$\begin{cases} \Delta p = \nabla \cdot \mathbf{f} \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} = -(\partial_t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.5)$$

Cependant, nous n'avons pas trouvé dans la littérature d'algorithme permettant de résoudre ce problème dans le cas où des bords sont non-conformes. Une autre manière de résoudre le problème (6.4) sans imposer la condition de Neumann est d'utiliser une formulation faible du problème (au sens des distributions) présentée dans le chapitre 1.

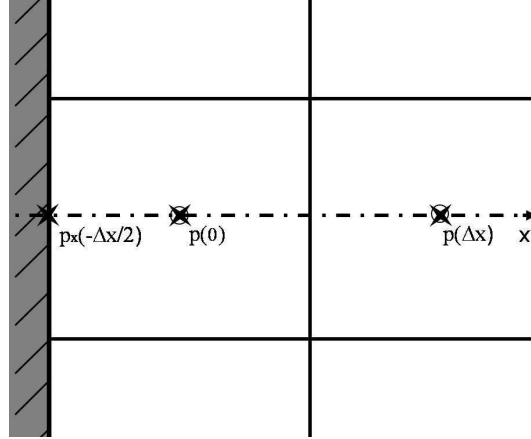


FIG. 6.1 – Position du champ de pression p près d'un bord régulier sur la grille MAC

Regardons comment nous pourrions concevoir une implémentation naïve du problème (6.5), en nous limitant au cas où une cellule de simulation ne présente qu'un bord régulier. Près du bord, on utilise $\Delta p = p_{xx} + p_{yy}$, et on utilise comme d'habitude des expressions appropriées pour les dérivées secondes. On écrit, par exemple,

dans le cas indiqué figure 6.1 :

$$\begin{cases} p(\Delta x) = p(0) + \Delta x p_x(0) + \frac{\Delta x^2}{2} p_{xx}(0) + \frac{\Delta x^3}{6} p_{xxx}(0) + O(\Delta x^3) \\ p_x(-\frac{\Delta x}{2}) = p_x(0) - \frac{\Delta x}{2} p_{xx}(0) - \frac{\Delta x^2}{8} p_{xxx}(0) + O(\Delta x^3) \end{cases}$$

on obtient alors :

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{p(\Delta x) - p(0)}{\Delta x} - p_x \left(-\frac{\Delta x}{2} \right) \right) = p_{xx}(0) + \frac{\Delta x}{24} p_{xxx}(0) + O(\Delta x^2) \quad (6.6)$$

la dérivée au bord $p_x(-\Delta x/2)$ étant fournie par la condition de Neumann. Le problème (6.5) discrétisé sur le domaine Ω_p –qu'on définira plus précisément par la suite–, fait intervenir des conditions de bords sur $\partial\Omega_p$, définit à travers des équations discrète du type (6.6).

Or nous savons que pour être bien posé, le problème de Neumann doit être compatible avec la formule de Green-Ostrograsky :

$$\int_{\Omega} \Delta p = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \nabla p \quad (6.7)$$

Quand un problème de Neumann est discrétisé, sa formulation matricielle doit aussi vérifier une condition analogue, de la forme :

$$\sum_{\Omega_p} \nabla \cdot \mathbf{f} = \sum_{\partial\Omega_p} \alpha \mathbf{n} \cdot \nabla p \quad (6.8)$$

Les sommes intervenant ici, seront dépendantes de la discrétisation utilisée. Typiquement, \sum_{Ω_p} indexe tous les points où le problème de Poisson est écrit en différence finies. Le terme de droite $\sum_{\partial\Omega_p} \alpha \mathbf{n} \cdot \nabla p$ fera intervenir une pondération des valeurs de $\mathbf{n} \cdot \nabla p$ qui dépend de la façon dont l'opérateur Δ est discrétisé et de la façon dont les conditions de bord sont introduites à travers les équations du type (6.6). Il n'est donc pas apparent que cette égalité soit toujours satisfaite. En fait, selon l'implémentation, les erreurs numériques peuvent conduire à des implémentations de (6.5) qui ne vérifieront pas (6.8). Alors, le problème discret est mal posé, et ne possède pas de solution. Cette difficulté devient particulièrement critique quand les bords du domaine sont non-conforme.

Nous allons réécrire le problème de Stokes (6.1) sous une forme différente qui se prêtera mieux à une discrétisation du problème de Neumann en garantissant qu'il

soit toujours bien posé. Pour cela, nous continuons à faire l'hypothèse que l'écoulement est bidimensionnel, même si nous défendrons plus loin que cette hypothèse peut être relaxée. L'incompressibilité permet alors à la fois d'introduire une fonction de courant et de réécrire le terme visqueux sous forme rotationnelle. En utilisant la notation $\nabla^\perp = (\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x})$, on arrive à :

$$\nabla p = \nabla^\perp(\omega - \psi_t) + \mathbf{f} \quad (6.9)$$

avec $\omega = u_y - v_x = \nabla^\perp \cdot \mathbf{u}$ et $\mathbf{u} = \nabla^\perp \psi$.

L'équation (6.9) munie de conditions de bord pour $\phi \equiv \omega - \psi_t$ est un problème de Neumann pour p . C'est évidemment le même problème de Neumann que celui déduit du problème de Stokes (6.1) lui-même, mais sous cette forme, l'équation de compatibilité continue (6.7) devient une évidence. Nous verrons qu'une représentation discrète de (6.9) de la même façon vérifiera naturellement une équation discrétisée analogue. La forme (6.9) du problème de Neumann reste une formulation faible, au contraire de (6.5). De la façon dont nous allons poser le problème, une condition forte apparaîtra sur ϕ , mais aucune sur p .

6.2 Le problème de Neumann

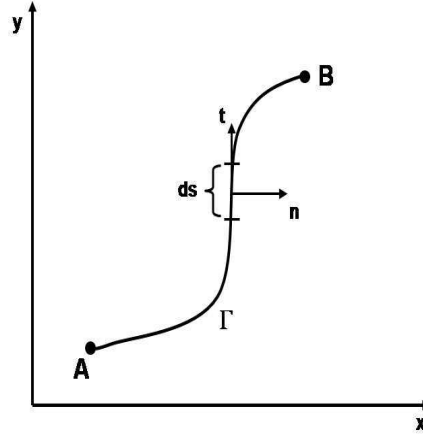


FIG. 6.2 – Représentation d'une courbe C reliant les points A et B dans un plan (x,y). ds est l'élément différentiel le long de C, \mathbf{n} et \mathbf{t} sont respectivement le vecteur unitaire normal et tangent

Nous nous concentrons sur un problème de Neumann de la forme :

$$(\mathcal{N}_0) \begin{cases} \nabla p = \nabla^\perp \phi + \mathbf{f} \\ \phi = \phi_b \end{cases} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (6.10)$$

Sa solution sera notée $p = \mathcal{N}_0^{-1}(\phi_b)$. Remarquons que l'équation $\nabla p = \nabla^\perp \phi + \mathbf{f}$ exprime une relation de dualité entre les fonctions p et ϕ . En effet, en intégrant (6.9) le long d'une courbe Γ joignant deux points $A, B \in \Omega$ (voir figure 6.2), on peut trouver soit :

$$\int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \nabla p \, dS = \phi_B - \phi_A + \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \quad (6.11)$$

soit encore :

$$p_B - p_A = \int_\Gamma \mathbf{t} \cdot \nabla \phi \, dS - \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \quad (6.12)$$

On peut donc, par intégration, calculer chaque fonction p ou ϕ connaissant l'autre.

6.2.1 Paires orientées et segments

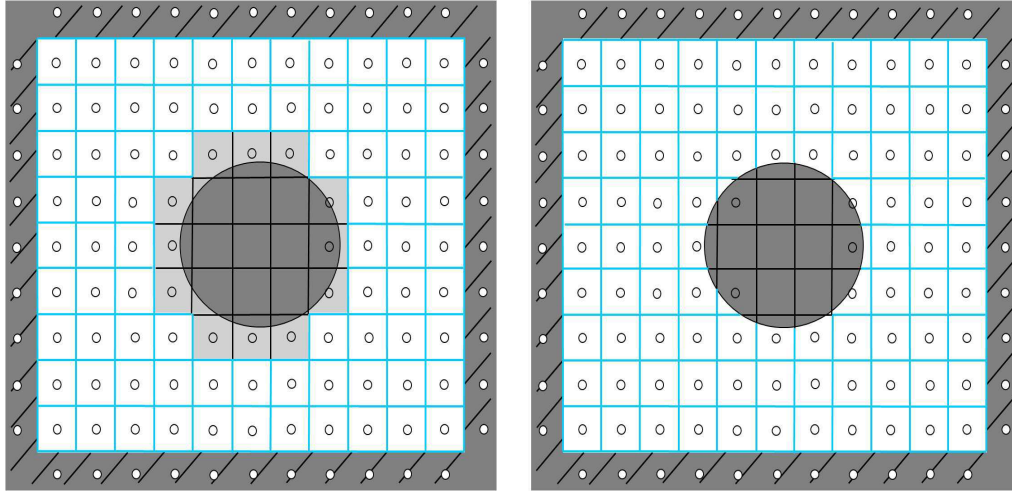


FIG. 6.3 – Exemple de domaines discrets : à gauche les montants de la grille MAC portant les points de $\Omega_u \cup \Omega_v$ sont colorés en bleu et les points de Ω_p désignés par les symboles \circ ; à droite les montants de la grille $\mathcal{S}(\Omega'_\phi) = \{[A, B], \quad \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega'_\phi)\}$ sont colorés en bleu et les points de Ω_p désignés par les symboles \circ .

Précisons pour commencer les points qui seront impliqués dans la forme discrète du problème (\mathcal{N}_0) . Les conventions utilisées pour noter les espaces discrets ont été

développées dans le chapitre 3. Rappelons que la grille MAC est définie étant donnée une origine $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, et une convention d'indexation $(x_\alpha, y_\beta) = (x_0 + \alpha \Delta x, y_0 + \beta \Delta y)$. Les points de base étant $\mathcal{M} = \{(x_i, y_j), \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$ (équation (3.2), section 3.1.1) nous aurons besoin d'indexer des ensembles de segments de grille. Nous définissons ainsi l'ensemble des paires orientées de points voisins de \mathcal{M} :

$$\mathcal{P} = \cup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \{((x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j)), ((x_i, y_j), (x_i, y_{j+1}))\} \quad (6.13)$$

et $\mathcal{S} = \{[A, B], \forall (A, B) \in \mathcal{P}\}$ l'ensemble des segments correspondants. Étant donné un domaine discret Ω_ϕ , nous aurons besoin d'accéder à l'ensemble des segments construits à partir des points de Ω_ϕ . On notera :

$$\mathcal{P}(\Omega_\phi) = \{(A, B) \in \mathcal{P} \mid (A, B) \in \Omega_\phi^2\} = \mathcal{P} \cap \Omega_\phi^2 \quad (6.14)$$

Cet ensemble ne nous suffira pas quand il faudra discrétiser le problème (\mathcal{N}_0) près d'un bord irrégulier. Nous aurons encore besoin de construire des segments dont les extrémités sont soit sur Ω_ϕ , soit sur $\partial\Omega_\phi$. Nous allons ainsi faire intervenir dans le problème des points qui ne sont pas sur la grille de base, mais à l'intersection des segments de \mathcal{S} et d'un bord irrégulier. Les points de $\Omega'_\phi = \Omega_\phi \cup \partial\Omega_\phi$ sont tous portés par l'ensemble des segments de grille $\cup_{(A,B) \in \mathcal{S}} [A, B]$. Étant donné un tel ensemble discret $\Omega'_\phi \subset \cup_{(A,B) \in \mathcal{S}} [A, B]$, on notera $\mathcal{P}(\Omega'_\phi)$ l'ensemble des paires orientées de points de Ω'_ϕ qui sont plus proches voisins. On notera $\mathcal{S}(\Omega'_\phi) = \{[A, B], \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega'_\phi)\}$ les segments correspondants. Ils sont représentés en bleu sur la figure 6.3b. Il est utile de les comparer avec les segments portant $\Omega_u \cup \Omega_v$, c'est à dire le support du champ de vitesse dans la méthode ϕ - ψ : se reporter à la figure 3.2b de la section 3.1.2.

Munis de ces définitions, revenons à la discrétisation du problème de Neumann (\mathcal{N}_0) . Les condition de bord seront exprimées sur les points de $\partial\Omega_\phi$. C'est donc en ces points que les valeurs du champ ϕ_b pourront être utilisées. Afin de faire apparaître explicitement ces valeurs au bord, nous allons utiliser la forme intégrale (6.11). A priori, il nous faut utiliser cette expression pour toute paire de points (A, B) du domaine $\Omega_\phi \cup \partial\Omega_\phi$. Mais on peut alors choisir un contour Γ (voir figure 6.4 pour un exemple) qui soit porté par les segments de grille ($\Gamma \subset \cup_{I \in \mathcal{S}} I$). Donc, même si les points A et B ne sont pas proches voisins (si $(A, B) \notin \mathcal{P}(\Omega_\phi \cup \partial\Omega_\phi)$), on peut toujours décomposer les intégrales (6.11) en une somme d'intégrales sur des segments. Autrement dit, écrire (6.11) pour tout $(A, B) \in (\Omega_\phi \cup \partial\Omega_\phi)^2$ est équivalent

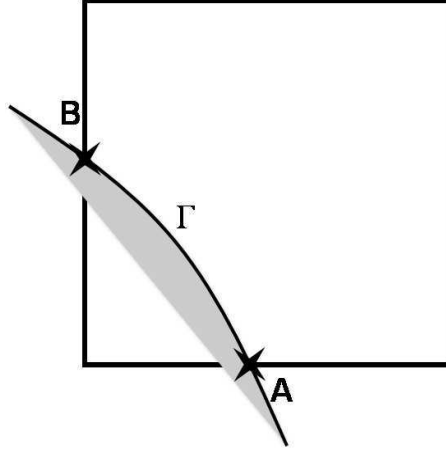


FIG. 6.4 – Représentation d’une interface Γ reliant une paire de points (A, B) du domaine $\Omega_\phi \cup \partial\Omega_\phi$

à l’écrire pour tout $(A, B) \in \mathcal{S}(\Omega_\phi \cup \partial\Omega_\phi)$.

Du problème (\mathcal{N}_0) nous extrayons donc l’ensemble des équations suivantes :

$$\begin{cases} \int_A^B \mathbf{n} \cdot \nabla p = \phi_B - \phi_A + \int_A^B \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} & \forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega_\phi \cup \partial\Omega_\phi) \\ \phi(A) = \phi_b(A) & \forall A \in \partial\Omega_\phi \end{cases} \quad (6.15)$$

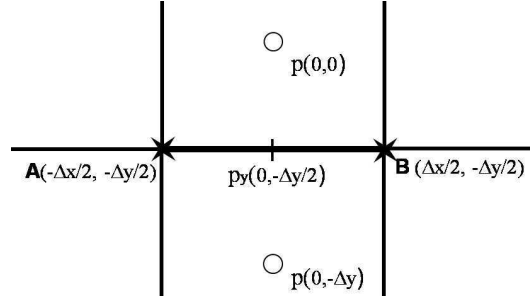
Nous n’avons pas pour l’instant précisé comment p sera représenté, ni sur quels points. Les équations (6.15) ne définissent pas encore un problème bien posé, mais seulement un ensemble des contraintes extraites de (\mathcal{N}_0) .

6.2.2 Discrétisation sur une grille régulière

Nous commencerons par étudier la situation d’un domaine à bords réguliers. Dans ce cas, tous les segments intervenant dans (6.15) sont aussi réguliers : leurs extrémités sont toujours des points de la grille de base \mathcal{M} . Aussi, les valeurs de p étant comme d’habitude connues sur la grille \mathcal{M}_p , nous aurons accès par différences centrées aux composantes du gradient ∇p sur les points du champ de vitesse, $\in \mathcal{M}_u \cup \mathcal{M}_v$.

6.2.2.1 Cellules régulières loin du bord

Pour chaque segment $[A, B]$ régulier, nous calculons l’intégrale $\int_A^B \mathbf{n} \cdot \nabla p$ en utilisant un développement limité autour du milieu de $[A, B]$. Dans le cas de la figure 6.5, il

FIG. 6.5 – Segment $[A, B]$ régulier.

vient :

$$p_y(x) = p_y^0 + yp_{yy}^0 + xp_{yx}^0 + \frac{y^2}{2}p_{yyy}^0 + xyp_{yxx}^0 + \frac{x^2}{2}p_{yxx}^0 + O(\Delta x^3, \Delta y^3) \quad (6.16)$$

d'où :

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} p_y(x)dy = (p_y^0 - \frac{\Delta y}{2}p_{yy}^0 + \frac{\Delta y^2}{8}p_{yyy}^0)\Delta x + \frac{\Delta x^3}{24}p_{yxx}^0 + O(\Delta x^4, \Delta y^4) \quad (6.17)$$

Un développement limité de $p(0, -\Delta y) = p(-\Delta y)$ autour de $p(0, 0) = p^0$ le long de l'axe y donne par ailleurs :

$$p(-\Delta y) = p^0 - \Delta yp_y^0 + \frac{\Delta y^2}{2}p_{yy}^0 - \frac{\Delta y^3}{6}p_{yyy}^0 + O(\Delta y^4). \quad (6.18)$$

L'intégrale (6.17) sur un segment $[A, B]$ s'écrit alors :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_A^B p_y(x)dy = \frac{p^0 - p(-\Delta y)}{\Delta y} - \frac{\Delta y^2}{24}p_{yyy}^0 + \frac{\Delta x^2}{24}p_{yxx}^0 + O(\Delta x^3, \Delta y^3) \quad (6.19)$$

Prenons, maintenant l'exemple d'une cellule de la grille MAC qui est loin d'un bord, comme sur la figure 6.6. On effectue l'intégrale sur le périmètre A, B, C, D, A de la cellule en utilisant des expressions de la forme (6.19) sur chaque arête de la cellule.

Ainsi

$$-\frac{1}{\Delta x} \left(\int_A^B p_y(x)dy + \int_C^D p_y(x)dy \right) = \frac{p(\Delta y) - p(0)}{\Delta y} - \frac{p(0) - p(-\Delta y)}{\Delta y} + O(\Delta y^3) \quad (6.20)$$

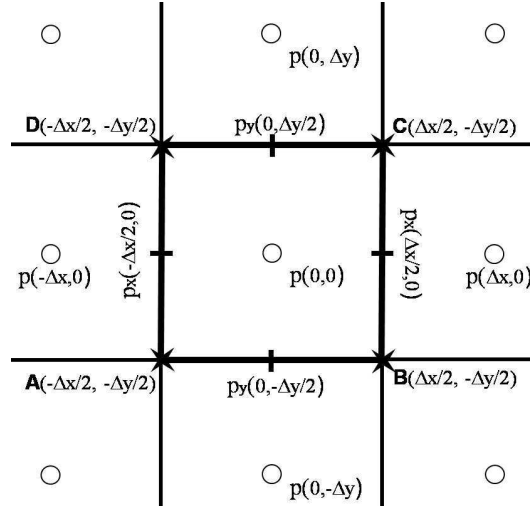


FIG. 6.6 – Une cellule de la grille MAC éloignée de tout bord.

et

$$-\frac{1}{\Delta y} \left(\int_C^B p_x(y) dx + \int_A^D p_x(y) dx \right) = \frac{p(\Delta x) - p(0)}{\Delta x} - \frac{p(0) - p(-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x^3) \quad (6.21)$$

Ainsi, en effectuant une intégration sur une cellule Mac, nous trouvons une expression de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint \mathbf{n} \cdot \nabla p \, dS &= \frac{-1}{\Delta x \Delta y} \left(\int_A^B p_y(x) dy + \int_B^C p_x(y) dx + \int_C^D p_y(x) dy + \int_D^A p_x(y) dx \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{p(\Delta x) - 2p(0) + p(-\Delta x)}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{p(\Delta y) - 2p(0) + p(-\Delta y)}{\Delta y} \right) + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Par ailleurs, en utilisant l'équation (6.11), et un développement limité analogue à (6.17) pour \mathbf{f} , on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Delta x} \left(\int_A^B p_y(x) dy + \int_C^D p_y(x) dy \right) &= \frac{\phi_C - \phi_D - \phi_B + \phi_A}{\Delta x} \\ &+ f^y \left(\frac{\Delta y}{2} \right) - f^y \left(-\frac{\Delta y}{2} \right) + O(\Delta x^3, \Delta y^3) \end{aligned}$$

et

$$-\frac{1}{\Delta y} \left(\int_C^B p_x(y) dx + \int_A^D p_x(y) dx \right) = \frac{\phi_D - \phi_A - \phi_C + \phi_B}{\Delta y} + f^x \left(\frac{\Delta x}{2} \right) - f^x \left(\frac{-\Delta x}{2} \right) + O(\Delta x^3, \Delta y^3)$$

Ainsi nous pouvons également écrire l'expression (6.22) sous la forme

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint \mathbf{n} \cdot \nabla p \, dS = \frac{f^x \left(\frac{\Delta x}{2} \right) - f^x \left(\frac{-\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} + \frac{f^y \left(\frac{\Delta y}{2} \right) - f^y \left(\frac{-\Delta y}{2} \right)}{\Delta y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2)$$

C'est à dire, que l'on retrouve une forme discrétisée de Δp , avec l'expression usuelle du Laplacien en différences finies que l'on va écrire sous la forme :

$$\Delta_h p = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta y} \right) = \nabla_h \cdot f \quad (6.23)$$

6.2.2.2 Cellules régulières près d'un bord

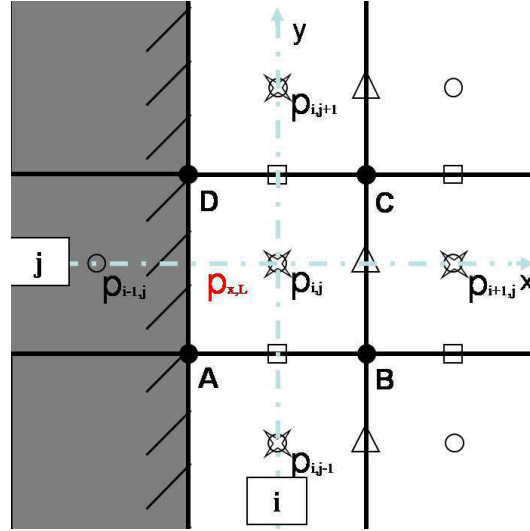


FIG. 6.7 – Configuration du stencil formant le terme Δp en fonction de la position du champ de pression p près d'un bord régulier sur la grille MAC

Supposons maintenant que l'on cherche à écrire le problème de Neumann près d'un bord comme illustré figure 6.7. On peut discrétiser le problème de Neumann au bord de deux façons :

1. Soit, on utilise un développement limité de p en faisant apparaître sa dérivée au bord :

$$p_{xx} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} - p_{x,L} \right) + O(\Delta x^2) \quad (6.24)$$

Cela mène à des expression du Laplacien près du bord de la forme :

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) = (\nabla \cdot f)_{i,j} + \frac{p_{x,L}}{\Delta x} \quad (6.25)$$

2. Soit on intègre l'équation (6.11) uniquement sur le contour A, B, C, D . Cela donne une expression de la forme :

$$\phi_D - \phi_A = (\phi^0 - \frac{\Delta x}{2} \phi_x^0 + \frac{\Delta x^2}{8} \phi_{xx}^0) \Delta y + \frac{\Delta y^3}{24} \phi_{yy}^0 + O(\Delta x^4, \Delta y^4) \quad (6.26)$$

Pour chacune de ces méthodes, on peut encore extrapoler p au-delà du bord dans l'esprit des méthodes de "Ghost Fluids" [22]. Cela permet d'utiliser une valeur fictive de p au point $(i-1, j)$ (voir figure 6.7). En intégrant sur tout le contour ABCDA de la cellule de la figure 6.6 on arrive à une expression identique à (6.23), mais il faut alors augmenter le problème numérique en introduisant des expressions pour $p_{i,j} - p_{i-1,j}$ en faisant intervenir le gradient de p au bord, soit à travers sa valeur, en utilisant l'expression (6.26) le long du bord A, D .

Si ces méthodes sont équivalentes sur le plan mathématique elle apportent des problèmes numériques différents parce que les calculs ϕ ou ∇p au bord, introduisent inévitablement des erreurs : les sources et les conditions de bord qui interviennent dans le problème de Poisson discrétisé ne garantissent pas toujours que le problème soit numériquement bien posé quand on utilise la première méthode. En utilisant la forme (6.26) on garantit que le problème de Neumann est bien posé, ce qui est évident en faisant la somme de toutes les équations de la forme (6.26) et (6.23) intervenant dans le problème.

6.2.3 Près d'un bord irrégulier

Prenons une cellule de la grille MAC qui croise un bord irrégulier, comme sur la figure 6.8. Dans ce cas, l'utilisation de la méthode 1 discuté plus haut devient très problématique, puisqu'il faudrait être capable d'introduire une condition forte sur p tout en garantissant que le problème de Neumann discrétisé reste bien posé. C'est là que l'utilisation d'expression intégrale prend tout son sens. Dans le cas illustré à gauche, nous allons en effet utiliser une intégrale de contour entre les points

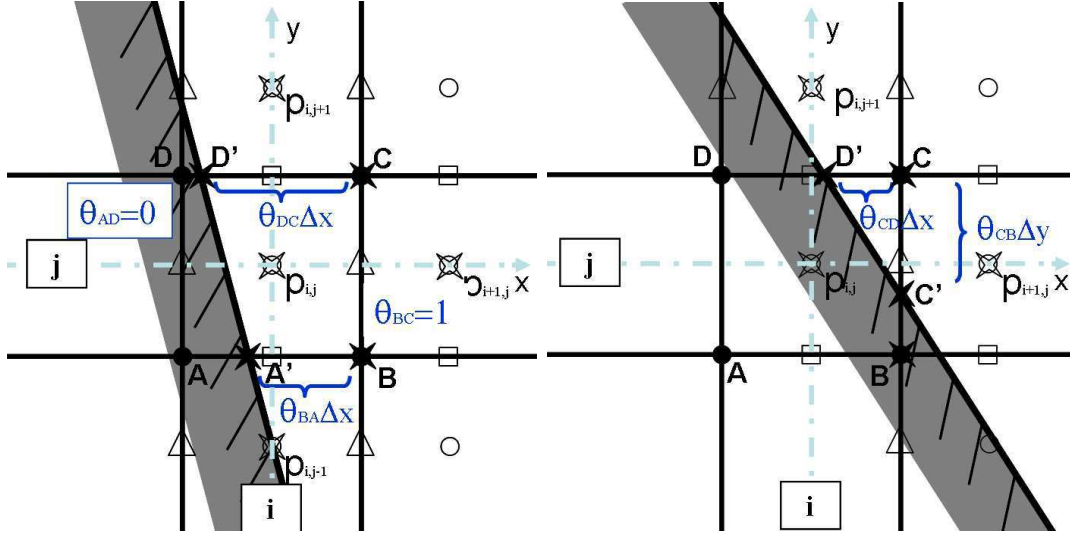


FIG. 6.8 – Configuration du stencil formant le Δp en fonction de la position du champ p près d'un bord irrégulier sur la grille MAC

A', B, C, D' , comme dans le cas du bord régulier de la figure 6.7.

Dès qu'un segment de cellule touche le domaine fluide – comme c'est le cas des segments $[AB]$, $[CD]$ sur la figure 6.8-gauche ou $[BC]$, $[DC]$ sur la figure 6.8-droite –, on a besoin de calculer l'intégrale sur la partie de ce segment qui est à l'intérieur du fluide. Cela nous oblige à faire parfois intervenir des valeurs fictives de la pression toujours sur les points de \mathcal{M}_p , mais éventuellement hors de Ω .

Nous avons donc besoin : (i) de généraliser l'expression (6.17) près de bords irréguliers ; (ii) d'utiliser des “ghost points” pour p afin de donner un sens à ces expressions sur toute cellule de la grille MAC qui coupe le domaine fluide.

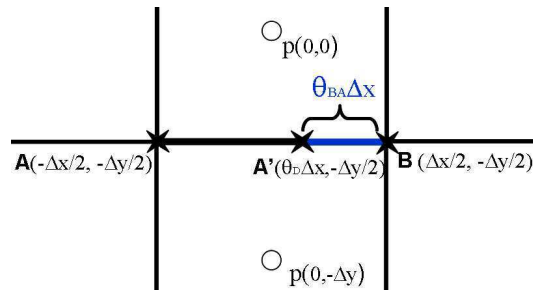


FIG. 6.9 – Segment $[A, B]$ coupé.

En utilisant le développement limité (6.16), et en intégrant sur le segment $[A'B]$ de la figure 6.9, nous obtenons l'expression :

$$\begin{aligned} \int_{A'}^B p_y(x) dy &= \theta_{BA} \Delta x \left(\frac{p^0 - p(-\Delta y)}{\Delta y} - \frac{\Delta y^2}{24} p_{yyy}^0 \right) \\ &+ \frac{\theta_{BA} \Delta x^2 (1 - \theta_{BA})}{2} \left(p_{xy}^0 - p_{xyy}^0 \frac{\Delta y}{2} \right) \\ &+ \frac{\theta_{BA} \Delta x^3}{24} (4\theta_{BA}^2 - 6\theta_{BA} + 3) p_{yx}^0 + O(\Delta x^3, \Delta y^3) \end{aligned} \quad (6.27)$$

qui est une généralisation de (6.17) pour $\theta_{BA} \in [0, 1]$. En calculant l'intégrale (6.11) sur les segments $[A'B]$, $[CD']$ et $[BC]$ comme représentée figure 6.8-gauche, nous trouvons :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Delta x} \left(\int_{A'}^B p_y(x) dy + \int_C^{D'} p_y(x) dy \right) = \\ \frac{\phi_C - \phi_D' - \phi_B + \phi_A'}{\Delta x} + \theta_{CD} f^y \left(\frac{\Delta y}{2} \right) - \theta_{BA} f^y \left(\frac{-\Delta y}{2} \right) + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (6.28)$$

et

$$-\frac{1}{\Delta y} \int_C^B p_x(y) dx = \frac{\phi_B - \phi_C}{\Delta y} + f^x \left(\frac{\Delta x}{2} \right) + O(\Delta y) \quad (6.29)$$

En sommant les intégrales (6.28) et (6.29) et en utilisant des intégrales de la forme (6.27) nous obtenons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint \mathbf{n} \cdot \nabla p \, dS &= \frac{\phi_{A'} - \phi_{D'}}{\Delta y} + \frac{\theta_{BA} f^y \left(\frac{\Delta y}{2} \right) - \theta_{CD} f^y \left(\frac{-\Delta y}{2} \right)}{\Delta y} + \frac{f^x \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} + O(1) \\ &= \theta_{CD} \frac{p(\Delta y) - p^0}{\Delta y} - \theta_{BA} \frac{p^0 - p(-\Delta y)}{\Delta y} - \frac{p^0 - p(-\Delta x)}{\Delta x} + O(1) \end{aligned} \quad (6.30)$$

On remarque que cette expression fait intervenir un opérateur divergence discrétisé :

$$\nabla \cdot (\theta \xi) = (\theta_{i+1,j} \xi_{i+1,j} - \theta_{i,j} \xi_{i,j}) + (\theta_{i,j+1} \xi_{i,j+1} - \theta_{i,j} \xi_{i,j}) \quad (6.31)$$

où le champ $\theta \in [0, 1]$ est à valeur sur chaque arête de la grille MAC et correspond à sa fraction dans le domaine occupé par le fluide Ω . Ceci nous permet d'écrire l'équation (6.30) sous une forme généralisée :

$$\nabla \cdot (\theta \nabla p) = \nabla \cdot \theta f + \llbracket \phi \rrbracket \quad (6.32)$$

$$\text{où} \begin{cases} \llbracket \phi \rrbracket = 0 & \text{dans l'inclusion} \\ \llbracket \phi \rrbracket = \frac{\phi'_A - \phi'_D}{\Delta x \Delta y} & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut s'inquiéter de voir apparaître des erreurs d'ordre $O(1)$ dans la discrétisation du problème de Poisson. Commençons par tester notre méthode numériquement.

6.2.4 Validations numériques du Solveur Poisson Neumann

Pour valider nos solveurs de Poisson, nous utilisons la solution du problème test décrit en section 3.2.1 dans le chapitre 3, au temps $t = 1$. L'expression du champ ϕ est alors :

$$\begin{aligned} \phi^{\text{gs}}(x, y) &= 2\pi^2 \sin(1) (\cos(2\pi x) \sin^2(\pi y) + \cos(2\pi y) \sin^2(\pi x)) \\ &\quad - \cos(1) \sin(2\pi y) \sin^2(\pi x) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Le problème \mathcal{N}_0 (equation 6.10) s'écrit en utilisant ϕ^{gs} elle-même pour la condition de Dirichlet, $\phi_b = \phi^{\text{gs}}$, et en utilisant les expressions définies par les équations (3.11) et (3.12) à $t = 1$ pour le terme source.

Afin de tester nos implémentations près de bords régulier et irréguliers, nous utilisons les domaines test suivants (voir figure 6.10) :

- Un domaine carré $\Omega = [0.4, 2.4]^2$, de dimensions $L_x = L_y = 2$ (figure 6.10a)
- Le même domaine avec en son centre une particule de rayon $r = 1/6$ (figure 6.10b).

Le pas d'espace est $\Delta x = L_x/N_x$ et $\Delta y = L_y/N_y$, pour plusieurs résolutions $N_x \times N_y$ avec $N_x = N_y = 20, 40, 80, 160, 320, 640$.

Les matrices avec lesquelles nous travaillons sont creuses et nous permettent d'utiliser un stockage par bande. Elle ne sont pas symétriques, et pour les inverser, nous avons recourt à un algorithme de gradient bi-conjugué stabilisé (BICGSTAB) préconditionné par la factorisation incomplète de la matrice L (préconditionneur ILU). Ces algorithmes sont décrits en Annexe II.

Des courbes de convergence sont présentées figures 6.11 pour les deux cas présentés figures 6.10. Ils montrent que la convergence est d'ordre 2, et ce pour les normes $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_{L^\infty}$ et $\|\cdot\|_{H^1}$.

On comprend cette convergence en rappelant l'argument de Jomaa et al. [38] et Gibou et al. [23] pour le problème de Poisson Dirichlet. Les erreurs de troncature sur les cellules qui sont coupé par le bord introduisent dans la solution numérique du problème de Neumann pour p une erreur qui peut être vue comme la solution d'un problème de Dirichlet avec des sources d'ordre $O(\Delta x^2)$ au bord.

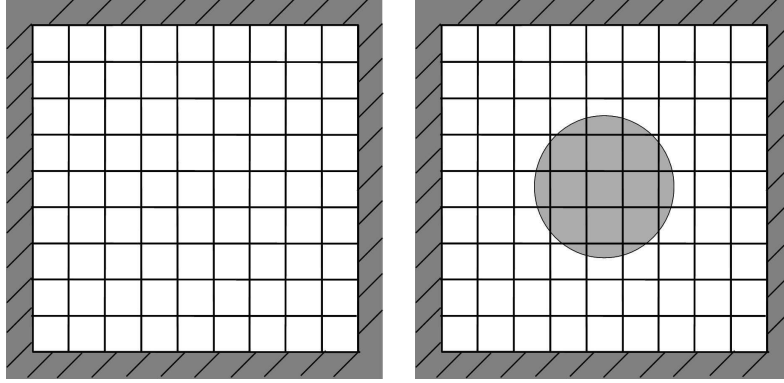


FIG. 6.10 – Géométries des tests proposés : à gauche, domaine carré de dimension 2×2 avec des bords réguliers ; à droite, domaine carré de dimension 2×2 avec un disque de rayon $1/6$.

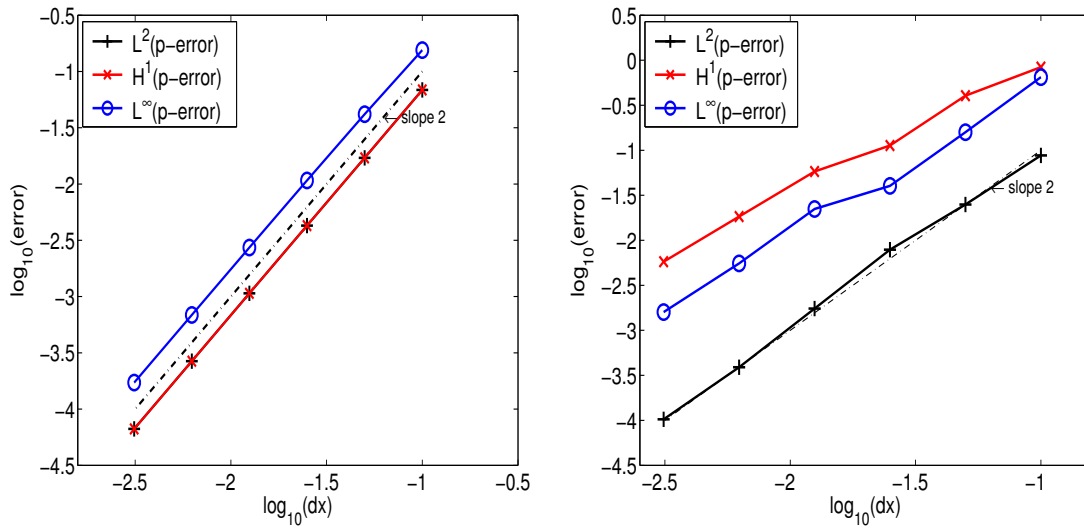


FIG. 6.11 – Courbes de convergence pour la solution du problème \mathcal{N}_0 pour le problème test de Guermond-Shen [29] : à gauche, résultats pour le domaine carré, sans inclusion ; à droite, avec inclusion.

6.3 Extrapolants pour le champ de vorticité

Nous disposons maintenant d'un solveur capable de résoudre les problèmes de Poisson-Neumann à l'ordre 2, et garantissant que le problème discret soit bien posé. Comme dans la méthode ϕ - ψ , cependant, nous devons maintenant faire face à une autre difficulté qui provient du fait que la condition de bord n'est connue qu'à travers le champ $\phi = \omega - \tilde{\psi}_t$, qui a besoin d'être extrapolé en certains points - on rappelle ici que $\tilde{\psi} = \int_0^s \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ (section 2.3) et s'agissant de différences sur les valeurs de ϕ sur le bord $\partial\Omega$, il n'y a pas de problème de constante à déterminer.

Loin du bord le champ de vorticité est obtenu par différence centrée d'ordre 2. Comme dans notre implémentation de la méthode ϕ - ψ , pour obtenir au ω au bord, nous avons besoin de calculer des extrapolants. Pour cela, nous avons le choix entre deux types de méthodes, soit en utilisant un développement limité près du bord, soit par extrapolation linéaire des valeurs de ω calculées dans le domaine fluide.

6.3.1 Près de bords réguliers

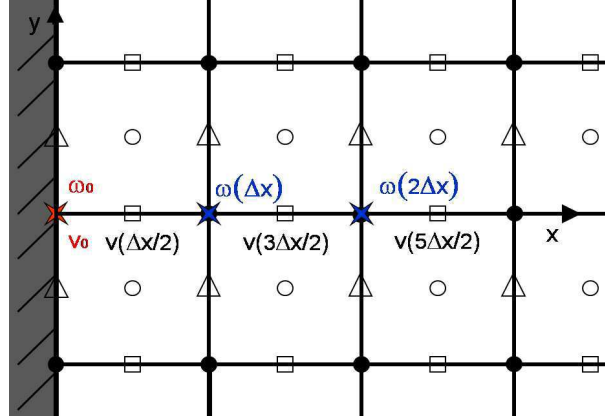


FIG. 6.12 – Position du champ de vitesse v près d'un bord régulier sur la grille MAC

Nous allons écrire en coordonnée cartésienne $\omega = u_y - v_x$. On connaît u et v sur le bord, et donc, aussi leurs dérivées le long du mur. Pour fixer les idées, prenons la configuration représentée sur la figure 6.12. Le bord est utilisé comme origine des x . Dans cet exemple on connaît analytiquement u^0 , v^0 , et u_y^0 , on va donc chercher à extrapoler v_x^0 pour pouvoir calculer

$$\omega_0 = u_y^0 - v_x^0 \quad . \quad (6.34)$$

  l'ordre $O(\Delta x^2)$. Pour cela nous allons écrire ces deux développements limités près du bord sous la forme :

$$\begin{cases} v(\frac{\Delta x}{2}) = v^0 + \frac{\Delta x}{2}v_x^0 + \frac{\Delta x^2}{8}v_{xx}^0 + \frac{\Delta x^3}{48}v_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ v(\frac{3\Delta x}{2}) = v^0 + \frac{3\Delta x}{2}v_x^0 + \frac{9\Delta x^2}{8}v_{xx}^0 + \frac{27\Delta x^3}{48}v_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \end{cases}$$

La combinaison linéaire de ces équations nous permet d'éliminer le terme v_{xx}^0 et d'obtenir :

$$v_x^0 = \frac{1}{3\Delta x} \left(-v \left(\frac{3\Delta x}{2} \right) + 9v \left(\frac{\Delta x}{2} \right) - 8v^0 \right) + O(\Delta x^2) \quad (6.35)$$

Comme pour le calcul de $\Delta\psi$ au chapitre $\phi-\psi$, nous pouvons aussi utiliser des valeurs de ω dans le fluide, en supposant qu'il sera  valu   à l'ordre $O(\Delta x^2)$ et procéder à une extrapolation linéaire. En utilisant les notation de la figure 6.12, on obtient

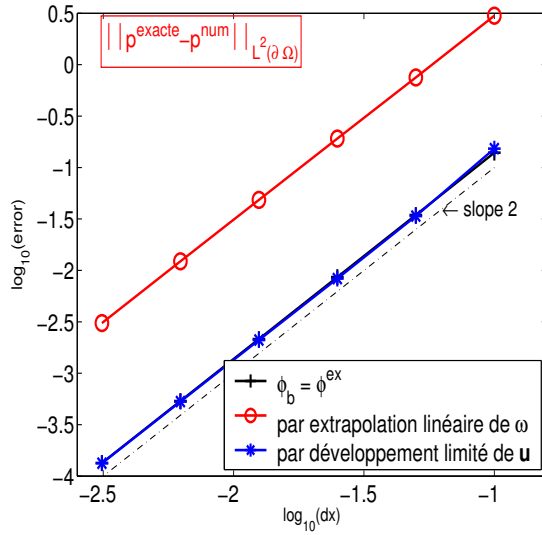
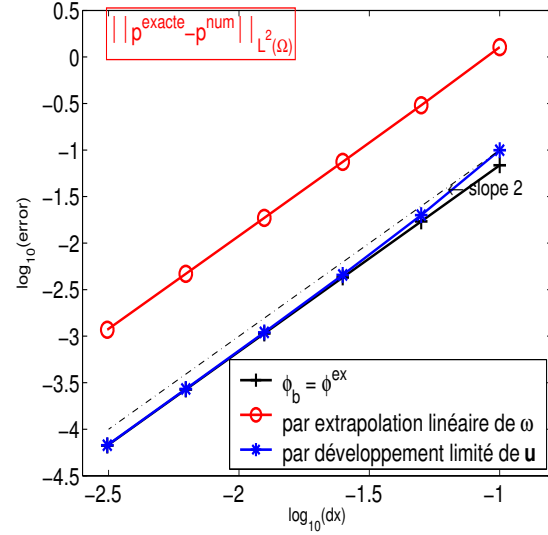
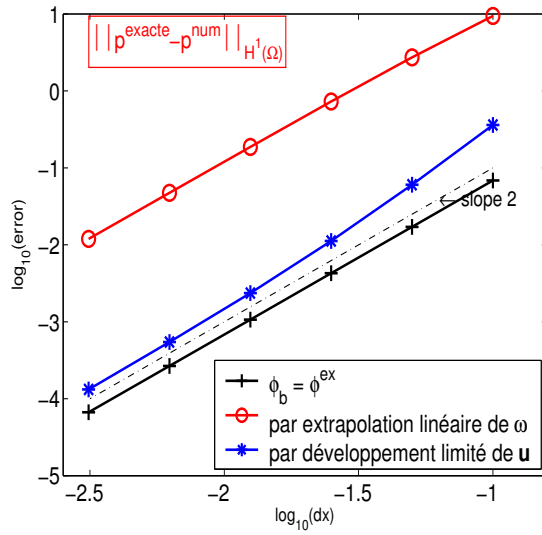
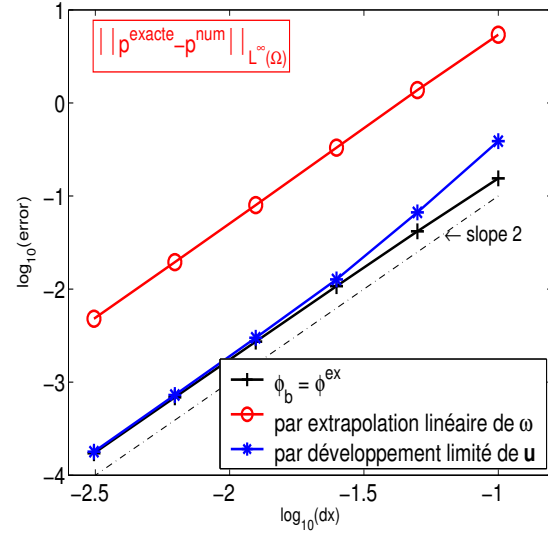
$$\omega_0 = 2\omega(\Delta x) - \omega(2\Delta x) + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (6.36)$$

Ces extrapolants permettent d'accéder à des valeurs de ϕ au bord, pour résoudre le problème de Neumann en pression que l'on  crita sous sa forme générale :

$$(\mathcal{N}_0) \begin{cases} \nabla p = \nabla^\perp \phi + \mathbf{f} \\ \phi = \phi_b = \omega_0 - \psi_t \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \quad (6.37)$$

Pour tester nos différents extrapolants, nous utilisons le test discuté dans la section 6.2.4 dans le cas d'un domaine carré, en prenant pour valeur de (u, v) la solution analytique (3.10) correspondante, issue du problème de Guermond et Shen à l'instant $t = 1$. Nous construisons donc un extrapolant ω_0 à partir des conditions aux limites connues du problèmes sur le bord (u_0, v_0) et nous cherchons la solution $\mathcal{N}_0^{-1}(\omega_0 - \psi_t^{\text{gs}})$ que nous comparons avec p^{gs} .

Les figures 6.13 présentent les résultats de convergence sur le champ de pression en normes L^2 , L^∞ et H^1 . Les résultats sont très homogènes, pour toutes les normes nous avons une convergence d'ordre $O(\Delta x^2)$ et cela pour les deux extrapolants (6.34) et (6.36) avec une précision supérieure dans le cas du développement limité du champ de vitesse (6.34).

(a) Etude de la norme L^2 de l'erreur sur p_w (b) Etude de la norme L^2 de l'erreur sur p (c) Etude de la norme H^1 de l'erreur sur p (d) Etude de la norme L^∞ de l'erreur sur p FIG. 6.13 – Etude des normes d'erreur sur p dans un domaine carré à $t=1$

6.3.2 Près d'une interface irrégulières

Nous abordons maintenant la construction d'un extrapolant pour ω sur une interface non conforme au maillage. Comme précedemment, nous pouvons envisager deux types de méthodes, soit basées sur des développements limités à partir d'un point du bord, soit utilisant une extrapolation linéaire à partir des valeurs du champ ω sur Ω_ϕ .

Par ailleurs, comme nous l'avons vu dans la section 6.2.1, le domaine de définition de pression Ω_p permet d'étendre le domaine de calcul à l'intérieur de la particule. Cela permet d'étendre le champ de vitesse jusqu'à tout segment de grille qui "touche" le domaine fluide, même si le point correspondant de $\mathcal{M}_u \cup \mathcal{M}_v$ n'est pas localisé dans le fluide (voir figure 6.14). En effet dans les équation de Stokes, la dynamique du champ de vitesse peut être écrit en tout point où l'on sait calculer ∇p .

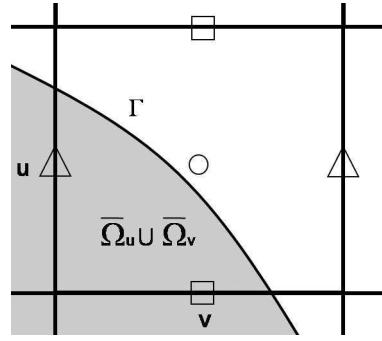


FIG. 6.14 – Domaine $\overline{\Omega}_u \cup \overline{\Omega}_v$ étendu en vitesse

On identifie deux situations selon que le domaine ou le champ de vitesse évolue en temps est :

- $\Omega_u \cup \Omega_v$ comme dans la méthode $\phi - \psi$. Ce sont les points de segment entièrement inclus dans le domaine fluide Ω . Dans ce cas le domaine Ω_ω est identique au domaine Ω_ϕ définie pour la méthode $\phi - \psi$
- $\overline{\Omega}_u \cup \overline{\Omega}_v$ ce sont les points définis précédemment. Ce domaine est plus étendu que le précédent car ω doit être calculer sur tout les points dont le segment est coupé par l'interface.

Par la suite, on r f rera à ces deux situations par (resp.) domaine strict et domaine étendu en vitesse.

6.3.2.1 Domaine strict en vitesse

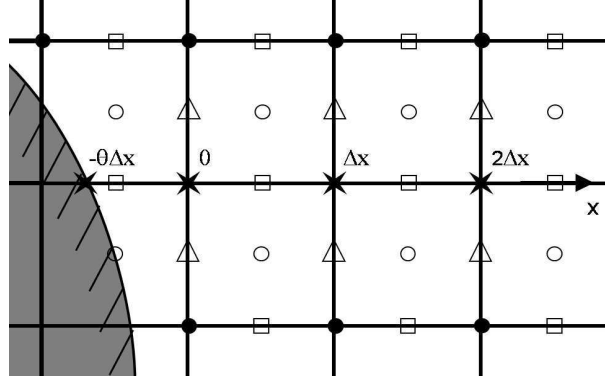


FIG. 6.15 – Position du champ ω près d'un bord irrégulier sur la grille MAC. L'origine des x est localisé sur le premier point de base dans le domaine Ω_ϕ donc par convention toujours à $\theta\Delta x$ du bord

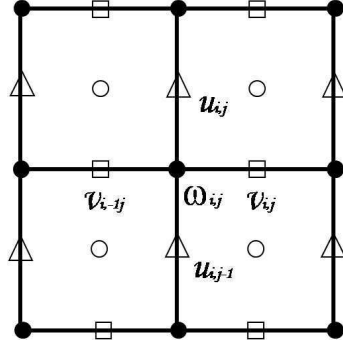
Nous avons vu dans le cas de bords réguliers que nous pouvions obtenir la convergence à l'ordre 2 en extrapolant ω linéairement à partir de ses valeurs sur Ω_ϕ , sous réserve qu'elles aient elles-même été calculées à l'ordre 2. Nous proposons de suivre la même méthodologie dans le cas d'un domaine irrégulier. Dans le cas illustré figure 6.15, l'extrapolation linéaire s'écrit ainsi :

$$\omega(-\theta\Delta x) = (1 + \theta)\omega(0) - \theta\omega(\Delta x) + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (6.38)$$

Pour se garantir de l'ordre $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$ de convergence de cette extrapolation linéaire, il faut que les deux termes de cette somme soient également d'ordre 2 en espace. Concernant le terme $\omega(\Delta x)$, il n'y pas de problème car il s'agit d'une somme en différence centrée des gradients de vitesse comme on peut le voir sur la figure 6.16. en notant $\omega(\Delta x) \approx \omega_{i,j}$, on peut écrire

$$\omega_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} - \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (6.39)$$

Pour calculer le terme $\omega(0)$, il existe différents cas de figure : prenons le cas (a1) représenté sur la figure 6.17, nous utiliserons les mêmes indices que sur la figure 6.15.

FIG. 6.16 – Position du champ ω sur la grille MAC loin d'un bord.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire les développements limités suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(-\theta \Delta x) = v^0 - \theta \Delta x v_x^0 + \frac{\theta^2 \Delta x^2}{2} v_{xx}^0 + O(\Delta x^3) \\ v\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta x\right) = v^0 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta x v_x^0 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta x^2}{2} v_{xx}^0 + O(\Delta x^3) \\ v\left(\left(n + \frac{3}{2}\right) \Delta x\right) = v^0 + \left(n + \frac{3}{2}\right) \Delta x v_x^0 + \left(n + \frac{3}{2}\right) \frac{\Delta x^2}{2} v_{xx}^0 + O(\Delta x^3) \end{array} \right.$$

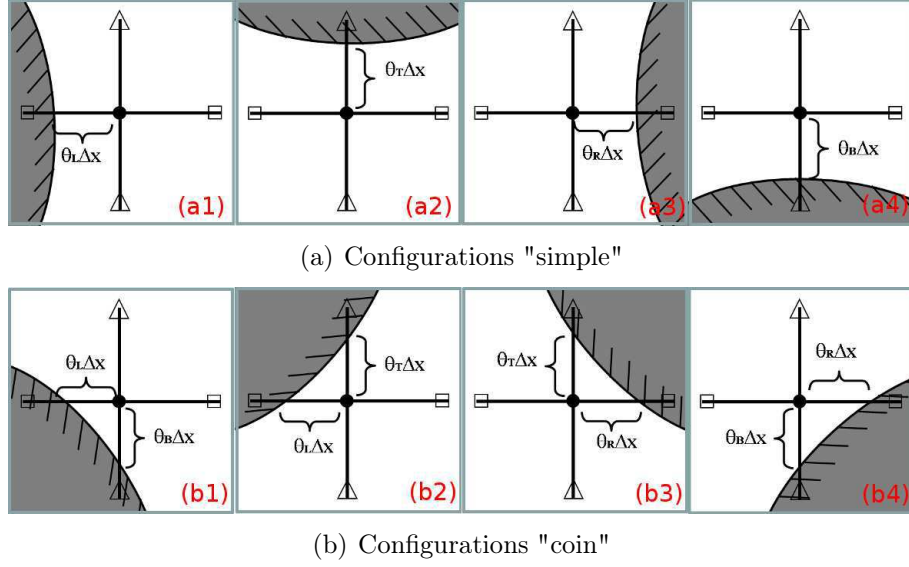
On verra plus loin l'interêt qu'il y a à faire apparaître des points distants quand $n \neq 0$. En éliminant les termes v^0 et v_{xx}^0 nous obtenons une approximation d'ordre 2 :

$$v_x^0 = \frac{1}{\eta \Delta x} \left(\alpha v(-\theta \Delta x) + \beta v\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta x\right) + \gamma v\left(\left(n + \frac{3}{2}\right) \Delta x\right) \right) + O(\Delta x^3) \quad (6.40)$$

$$\text{où} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 8(n+1) \\ \beta = 4\left(\theta^2 - \left(n + \frac{3}{2}\right)^2\right) \\ \gamma = -4\left(\theta^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right) \\ \eta = -\alpha\theta + \beta\left(n + \frac{1}{2}\right) + \gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \end{array} \right. \quad (6.41)$$

Dans ce cas, on peut permettre $n = 0$ pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 8 \\ \beta = 4\theta^2 - \frac{9}{4} \\ \gamma = -4\theta^2 + 1 \\ \eta = -(1 + 2\theta)(2\theta + 3) \end{array} \right. \quad (6.42)$$

FIG. 6.17 – position du champ ω près d'une interface irrégulière

On vérifiera en effet que pour tous $\theta \in [0, 1]$, $\eta < 0$. Au bilan :

$$v_x^0 = \frac{1}{\eta \Delta x} \left(\alpha v(-\theta \Delta x) + \beta v\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + \gamma v\left(\frac{3\Delta x}{2}\right) \right) + O(\Delta x^3) \quad (6.43)$$

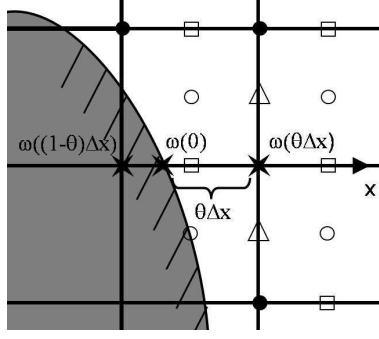
6.3.2.2 Domaine étendu en vitesse

Si le champ de vitesse est défini sur le domaine étendu $\overline{\Omega}_u \cup \overline{\Omega}_v$, l'implémentation à venir des équations de Stokes fera intervenir des valeurs de ω en tout point d'un domaine étendu $\overline{\Omega}_\omega$ qui inclus les extrémités des segments portant $\overline{\Omega}_u \cup \overline{\Omega}_v$.

Donc (i) nous aurons besoin d'extrapoler ω en des points réguliers, mais à l'intérieur de l'inclusion (ii) l'estimation de ω au bord peut se faire par interpolation (voir la figure 6.18). Ainsi dans le cas représenté sur la figure 6.18 on peut écrire :

$$\omega(0) = (1 - \theta)\omega(\theta \Delta x) + \theta\omega((1 - \theta)\Delta x) + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (6.44)$$

Pour s'assurer que $\omega(0)$ soit ainsi calculé à l'ordre 2, encore faut-il que les deux termes de la somme soient connus à cet ordre. Le terme $\omega(\theta \Delta x)$ ne pose pas de problème car il peut être obtenu simplement par différence centrée à partir des valeurs connues du champ de vitesse. Pour le terme $\omega((1 - \theta)\Delta x)$, qui est calculé hors du domaine fluide, différents cas de figure se présentent (voir figure 6.19).

FIG. 6.18 – Position du champ ω près d'un bord irrégulier sur la grille MAC

Prenons le cas (a1) représenté sur la figure 6.19, que nous détaillons sur la figure 6.20a. Nous pouvons utiliser une expression analogue à (6.40) en prenant l'origine du développement limité en v le point où $\omega((1-\theta)\Delta x)$ est défini. En utilisant le changement de variable $\theta' = \theta - 1$, on trouve :

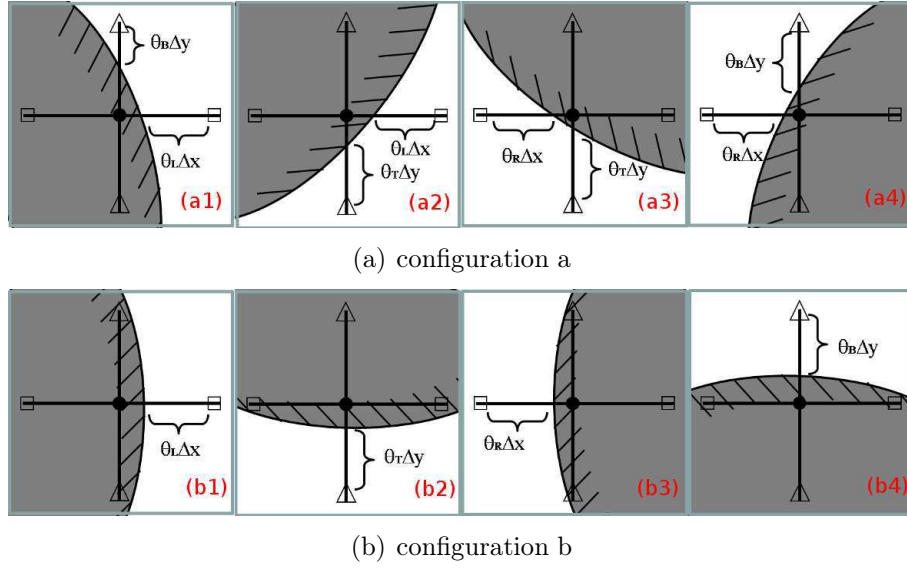
$$v_x^0 = \frac{1}{\eta \Delta x} \left(\alpha v(-\theta' \Delta x) - \beta v \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta x \right) + \gamma v \left(\left(n + \frac{3}{2} \right) \Delta x \right) \right) + O(\Delta x^3)$$

$$\text{où } \begin{cases} \alpha &= 8(n+1) \\ \beta &= 4 \left(\theta'^2 - \left(n + \frac{3}{2} \right)^2 \right) \\ \gamma &= -4 \left(\theta'^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \\ \eta &= -\alpha \theta' + \beta \left(n + \frac{1}{2} \right) + \gamma \left(n + \frac{3}{2} \right) \end{cases}$$

dans ce cas θ' est à valeur dans $[-1, 0]$ et donc η s'annulerait pour $\theta' = -1/2$, $n = 1$. Afin d'éviter des divergences de coefficients, on prend $n = 1$, d'où :

$$\begin{cases} \alpha &= 24 \\ \beta &= 4\theta'^2 - 25 \\ \gamma &= -4\theta'^2 + 9 \\ \eta &= -(4\theta' + 10)(4\theta' + 6) \end{cases}$$

Il existe une dernière configuration que nous représentons sur la figure 6.20b. On voit que le calcul de la composante u_y^0 au point d'origine $(0, 0)$ n'est pas accessible par un simple développement limité puisque nous ne possédons pas le champ de vitesse au point $(0, \Delta y/2)$ –noté u_+^0 – et au point $(0, -\Delta y/2)$ –noté u_-^0 . Pour calculer le champ de vitesse u_\pm^0 , nous appliquons les développements limités suivants

FIG. 6.19 – Position du champ ω près d'une interface irrégulière

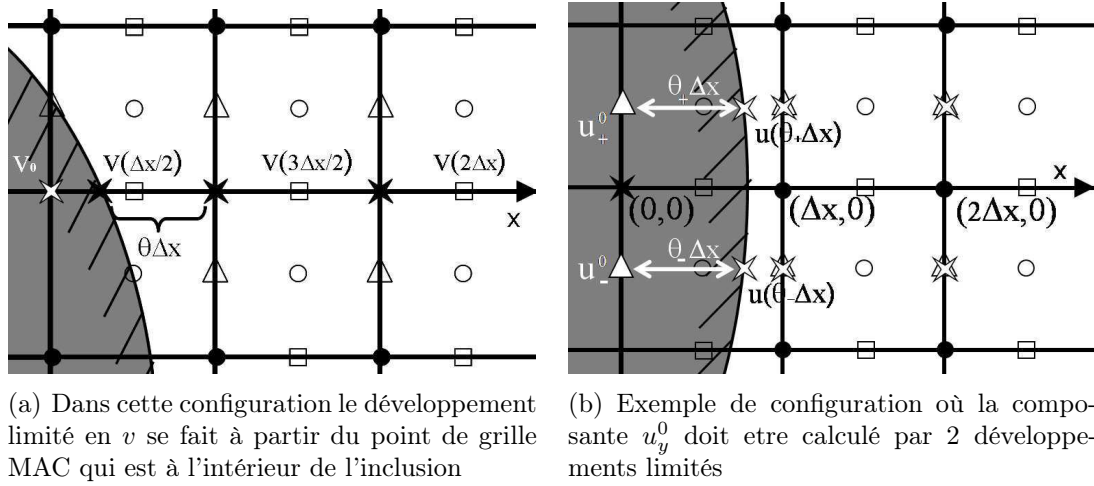
$$\begin{cases} u(\theta\Delta x) = u^0 + \theta\Delta x u_x^0 + \frac{\theta^2\Delta x^2}{2}u_{xx}^0 + O(\Delta x^3) \\ u((n+1)\Delta x) = u^0 + (n+1)\Delta x u_x^0 + (n+1)\frac{\Delta x^2}{2}u_{xx}^0 + O(\Delta x^3) \\ u((n+2)\Delta x) = u^0 + (n+2)\Delta x u_x^0 + (n+2)\frac{\Delta x^2}{2}u_{xx}^0 + O(\Delta x^3) \end{cases}$$

La combinaison linéaire de ces équations nous permet d'éliminer les termes u_x^0 et u_{xx}^0 dans ce cas nous obtenons une approximation l'ordre 3 qui s'écrit

$$u^0 = \frac{1}{\eta\Delta x} (\alpha u(\theta\Delta x) + \beta u((n+1)\Delta x) + \gamma u((n+2)\Delta x)) + O(\Delta x^3) \quad (6.45)$$

$$\text{où } \begin{cases} \alpha = 2(n+1) \\ \beta = -2(\theta^2 + n + 2) \\ \gamma = \frac{2\theta(n+1)(\theta + n + 1)}{n + 2} \\ \eta = \alpha\theta + \beta(n+1) + \gamma(n+2) \end{cases} \quad (6.46)$$

cette expression est valable pour les termes u_-^0 et u_+^0 , à partir desquels nous pouvons écrire une dérivée centrée d'ordre 2 : $u_y^0 = (u_+^0 - u_-^0)/\Delta y + O(\Delta x^2)$

FIG. 6.20 – Position du champ ω près d'un bord irrégulier sur la grille MAC

6.3.2.3 Validations numériques

Pour tester nos différents extrapolants, nous utilisons le test discuté dans la section 6.2.4 dans le cas d'un domaine carré avec une inclusion, en prenant pour valeur de (u, v) la solution analytique (3.10) correspondante à l'instant $t = 1$. Nous construisons donc un extrapolant ω_0 à partir des conditions aux limites connues du problème sur le bord (u_0, v_0) et nous cherchons la solution $\mathcal{N}_0^{-1}(\omega_0 - \psi_t^{\text{gs}})$ que nous comparons avec p^{gs} .

les résultats de convergence sont présentés sur la figure 6.21. Dans les 2 domaines étudiés –strict et étendu–, nous observons une convergence d'ordre 2 en norme L^2 , et $3/2$ en norme H^1 . La norme L^∞ est plus difficile à qualifier avec un ordre entre $3/2$ et 2.

Notons que dans le cas présent, (u, v)  tant connu sur $\overline{\Omega}_u \cup \overline{\Omega}_v$ le calcul de ω au bord peut être incorporé à travers une modification du terme source dans (6.37). En effet, la valeur de ω au bord est ici calculée par interpolation suivant (6.44). La différence $\llbracket \phi \rrbracket$ résultante est identique au terme $\text{div}(\theta \nabla^\perp \omega)$ en chaque cellule de sorte que nous pouvons aussi bien voir le problème sous la forme :

$$\nabla p = -\nabla^\perp \psi_t + \underbrace{\mathbf{f} + \nabla^\perp \omega}_{\text{source}} \quad (6.47)$$

Les deux derniers termes étant vu comme une source et seule la valeur ψ_t au bord intervenant dans le problème.

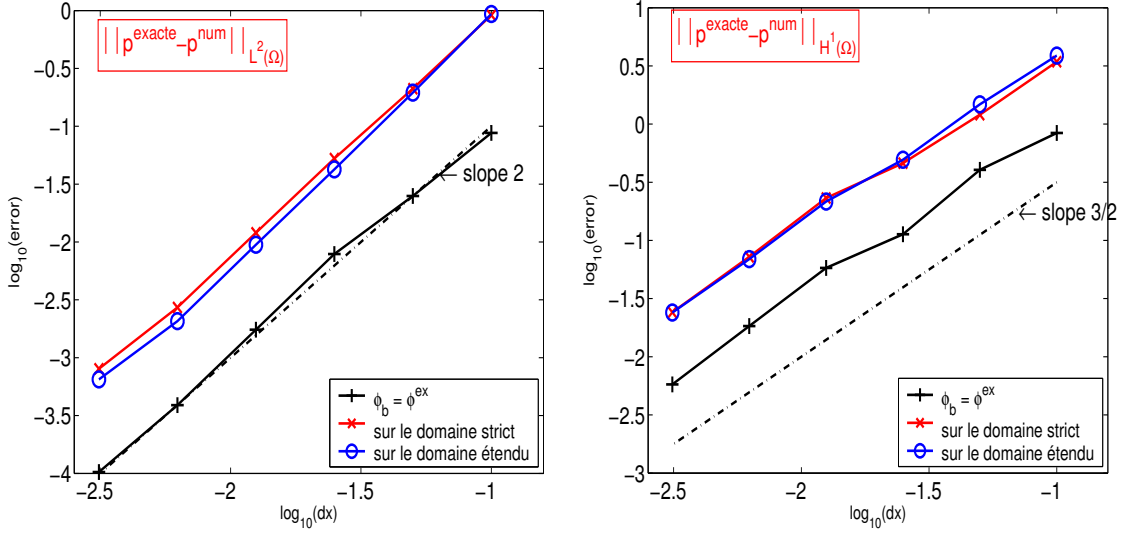
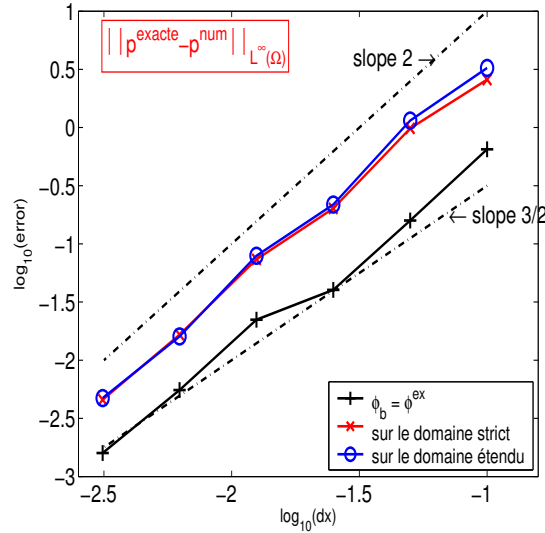
(a) Etude de la norme L^2 de l'erreur sur p (b) Etude de la norme H^1 de l'erreur sur p (c) Etude de la norme L^∞ de l'erreur sur p

FIG. 6.21 – Étude de convergence du champ solution p pour les normes d'erreur $L^2(\Omega_p)$ (a), $H^1(\Omega_p)$ (b) et $L^\infty(\Omega_p)$ (c) dans un domaine carré avec une inclusion figure 6.10b correspondant à la résolution du problème Poisson Neumann en utilisant soit un extrapolant linéaire soit en utilisant un interpolant linéaire du champ ω sur $\partial\Omega$

6.4 Dynamique de la méthode hybride

Nous savons maintenant discrétiser et résoudre le problème (6.5) et donc calculer le champ de pression qui apparaît explicitement dans l'équation d'évolution :

$$\mathbf{u}_t = -\nabla p - \nabla \times \omega + \mathbf{f} \quad (6.48)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6.49)$$

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (6.50)$$

Si nous avons dû beaucoup œuvrer afin d'obtenir la résolution spatiale voulue (ordre 2), nous garderons l'intégration temporelle dans sa forme la plus simple, en l'occurrence en utilisant un algorithme d'Euler explicite. Ce choix est motivé par notre souhait de nous concentrer encore sur les questions liées à la résolution spatiale et au traitement des conditions de bord, qui nous allons voir ne sont pas encore tout à fait traitées. Il sera toujours possible ultérieurement d'utiliser les méthodes que nous développons ici dans des algorithmes d'ordre plus élevé en temps (ex : schéma de Richardson). Notons que notre démarche est ici très différente de celle proposée par Guermond et Shen [29, 30] qui justement corrigent les erreurs sur le calcul de la pression par un choix très fin de la dynamique temporelle. Comme nous l'avons vu dans le chapitre " $\phi - \psi$ ", notre stratégie est plutôt de construire un algorithme qui résolve avec la meilleure approximation possible le vrai problème inverse physique, afin d'éviter d'avoir à le compléter par une quelconque étape de correction.

Étant donné un pas de temps Δt , nous notons $t^n = n \Delta t$. La solution exacte du problème continu (6.48) est notée $u(t^n)$, à distinguer des valeurs de la solution numérique au même temps, notée u^n . Le schéma d'Euler explicite s'écrit :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t (-\nabla p^n + \nabla^\perp \omega^n + f^n) \quad (6.51)$$

Pour avancer en temps nous avons besoin de calculer à chaque pas le gradient perpendiculaire du champ de vorticité $\nabla^\perp \omega^n$ et le gradient du champ de pression ∇p^n . Le champ de vorticité ω est obtenu par différenciation du champ de vitesse à partir des valeurs connues dans le domaine fluide. Pour calculer p^n on résout le problème de Poisson Neumann associé :

$$\begin{cases} \nabla p^n = \nabla^\perp \phi^n + \mathbf{f}^n & \text{sur } \Omega_p \end{cases} \quad (6.52)$$

Ce sujet a été discuté dans la section 6.2 (problème (6.10)). En utilisant les notations

introduites précédemment, la solution du problème (6.52) est notée :

$$p^n = \mathcal{N}_0^{-1}(\omega^n - \psi_t). \quad (6.53)$$

6.4.1 Etude dans un domaine régulier

Afin de tester notre algorithme (6.51)-(6.52), nous revenons au test de la section 3.2.1, dans la situation la plus simple : une cellule de simulation carrée sans inclusion. Nous calculons l'erreur intégrée en temps (3.16), pour différentes résolutions spatiales.

Sur la figure 6.22, nous présentons les résultats de convergence pour les champs de vorticité et de vitesse. Nous trouvons une convergence d'ordre $O(\Delta x^2)$ pour les normes L^2 , H^1 et L^∞ . Sur la figure 6.23, nous donnons pour ces 3 normes les résultats de convergence pour le champ de pression qui présente un ordre $O(\Delta x^{3/2})$. Les valeurs du champ de divergence en norme L^2 et L^∞ présenté figure 6.23c, sont inférieures à 10^{-7} .

Ces résultats sont à rapprocher de ceux obtenus de la section 5.1.2 chapitre 5. Nous avons vu que l'implémentation de la méthode $\phi - \psi$ converge souvent mal quand les valeurs de ψ_t intervenaient dans la condition aux limites. Il peut paraître donc surprenant qu'ici, cette convergence soit obtenue sans plus d'effort. Nous interprétons ce résultat en rappelant que lors de l'implémentation de la méthode $\phi - \psi$ dans un domaine régulier, la convergence était obtenue dès que nous utilisions des conditions mixtes Dirichlet-Neumann pour le champ ψ dans l'extrapolation du laplacien de ψ à l'interface. Ceci doit être rapproché des formules d'extrapolation que nous utilisons pour ω qui de fait, font intervenir les deux composantes du champ de vitesse au bord et semblent jouer un rôle semblable aux extrapolants Dirichlet-Neumann de la section 4.2.1.2.

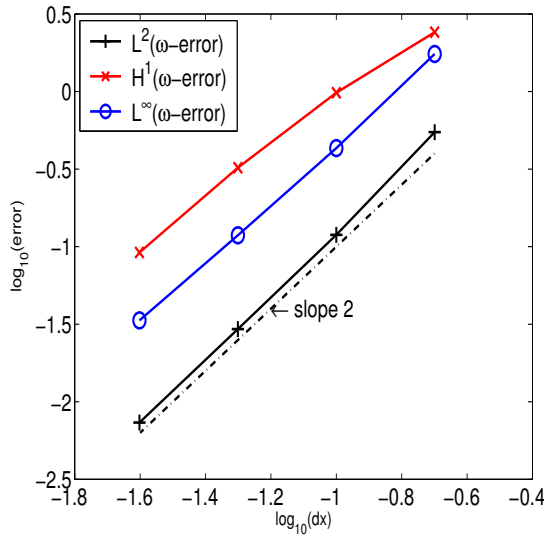
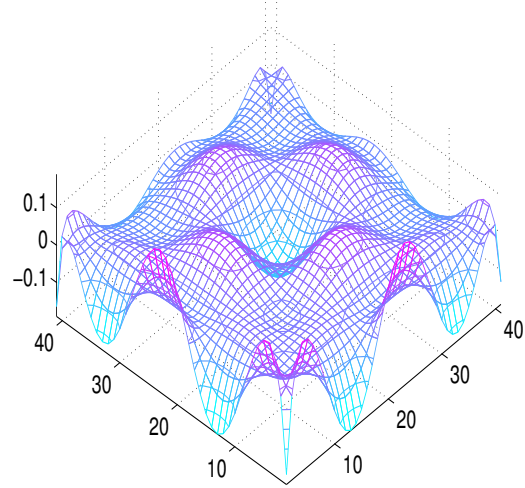
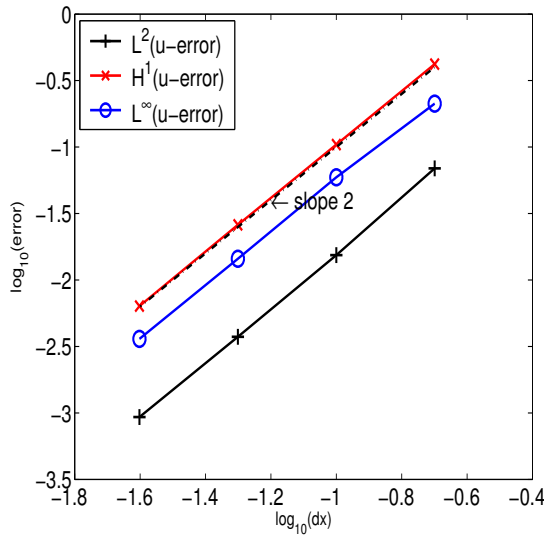
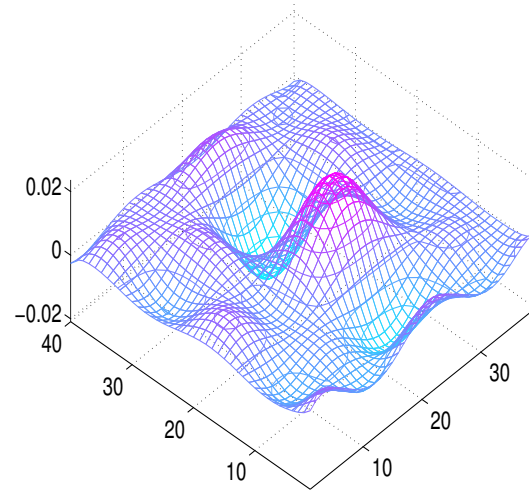
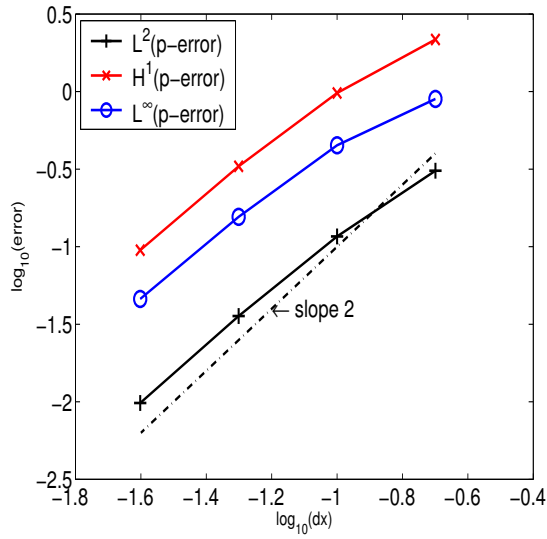
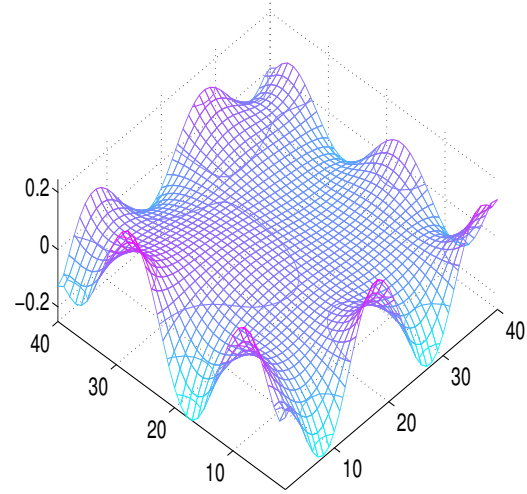
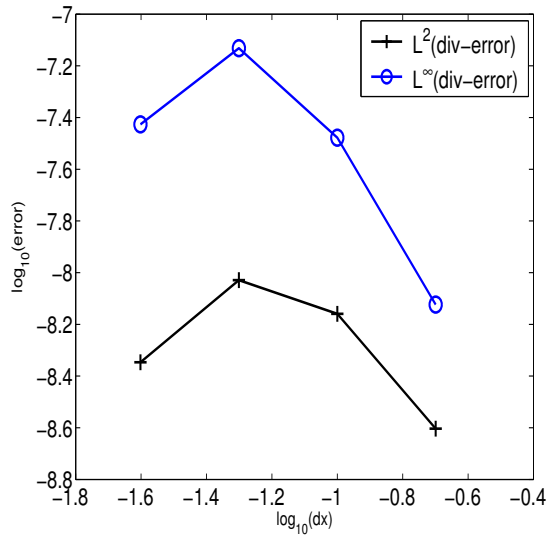
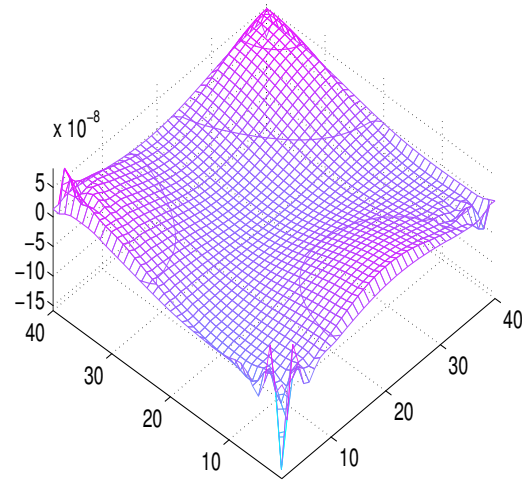
(a) Erreurs sur ω (b) Map de l'erreur du champ ω (c) Erreur sur u (d) Map de l'erreur du champ u

FIG. 6.22 – A gauche : étude de convergence du champ de vorticité ω et du champ u sur un domaine carré à $t=1$. A droite : représentation spatiale de l'erreur relative des champs $\hat{\omega}_{i,j} = \omega^{\text{gs}}(x_i, y_j) - \omega_{i,j}$ (b) et de la composante du champ de vitesse $\hat{u}_{i,j} = u^{\text{gs}}(x_i, y_j) - u_{i,j}$ dans un domaine carré de résolution 40×40 à $t=1$

(a) Erreurs sur p (b) Map de l'erreur du champ p 

(c) Erreur sur la divergence



(d) Map de l'erreur du champ de divergence

FIG. 6.23 – A gauche : étude des normes d'erreur sur p et du champ de divergence dans un domaine carré à $t=1$. A droite : représentation spatiale de l'erreur relative des champs $\hat{p}_{i,j} = p^{\text{gs}}(x_i, y_j) - p_{i,j}$ (b) et de divergence (d)

6.4.2 Etude dans un domaine borné carré avec une inclusion

Dés qu'on aborde le problème de l'implémentation des équations de Stokes en présence d'une inclusion rigide plusieurs difficultés apparaissent.

D'une part, comme nous l'avons vu section 6.3.2, se pose la question du domaine discret sur lequel les valeurs du champ de vitesse sont définies. Cette question est cruciale parce qu'elle conditionne la façon dont les extrapolations sont effectuées au bord. Dans ces deux cas, les valeurs de p sont toujours définies sur le domaine $\overline{\Omega}_p$ qui est aussi étendu à travers l'interface. L'usage de ce domaine est conditionné par notre implémentation d'un solveur pour le problème de Poisson Neumann.

D'autre part, les tests que nous avons effectués en utilisant ces deux types d'implémentation sur le champ de vitesse – en domaine strict ou étendu – présentent les mêmes pathologies que celles rencontrées lors de l'implémentation de la méthode $\phi - \psi$ (section 5.1.2 chapitre 5).

Nous présentons, pour illustrer ce propos, figure 6.24, les résultats de convergence pour l'implémentation du problème sous la forme (6.51)-(6.52) c'est à dire, en ne faisant intervenir dans l'expression de ϕ au bord que la valeur analytique ψ_t . Sur chaque figure, les résultats sont présentés pour le calcul en domaine étendu (à gauche) et strict (à droite). Nous présentons, pour l'implémentation du domaine étendu, deux calculs de normes : celles calculées sur $\overline{\Omega}_u \cup \overline{\Omega}_v$ (en trait pointillé); et celles calculées sur un domaine strict $\Omega_u \cup \Omega_v$ (en trait plein). Nous présentons également, figure 6.25, une représentation de l'erreur relative des champs ω , p et u –uniquement sur le domaine étendu– qui montre que l'erreur est localisé autour de l'inclusion.

Les résultats de ces simulations montrent une convergence d'ordre 2 en norme L^2 pour les champs ω , u et p . En norme H^1 et L^∞ les résultats de convergence restent peu satisfaisants.

Dans l'implémentation de la méthode $\phi - \psi$ nous avons appris que la solution de ce problème passait par l'introduction d'extrapolants permettant de fixer ψ^{n+1} sur $\partial\Omega$. Nous nous proposons ici de faire la même chose. Comme les valeurs de ψ au bord n'interviennent qu'à travers leurs différences de points en points (à cause du terme $\llbracket \phi = \omega - \psi_t \rrbracket$ dans l'équation 6.32), son extrapolation peut s'effectuer localement à partir des champs connus, c'est à dire ici, u et v .

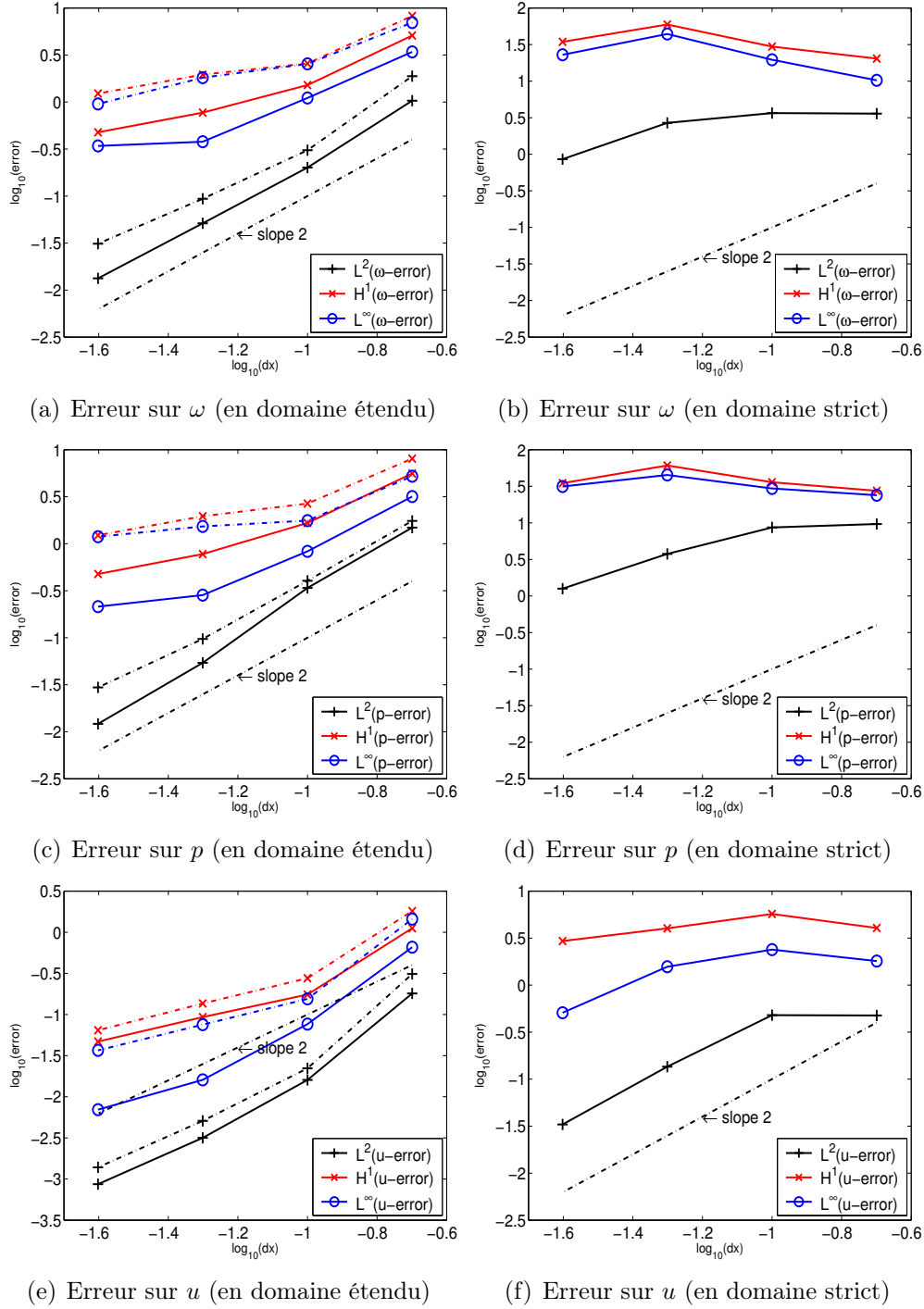


FIG. 6.24 – La colonne de gauche donne les résultats pour l'implémentation en domaine étendu. Les normes sont calculées soit sur $\bar{\Omega}_u \cup \bar{\Omega}_v$ en pointillé soit sur $\Omega_u \cup \Omega_v$ en trait plein et à droite dans le domaine strict. De haut en bas : étude de convergence du champ (resp.) de vorticité ω , de pression p et de la composante de vitesse u sur un domaine carré avec une inclusion à $t=1$.

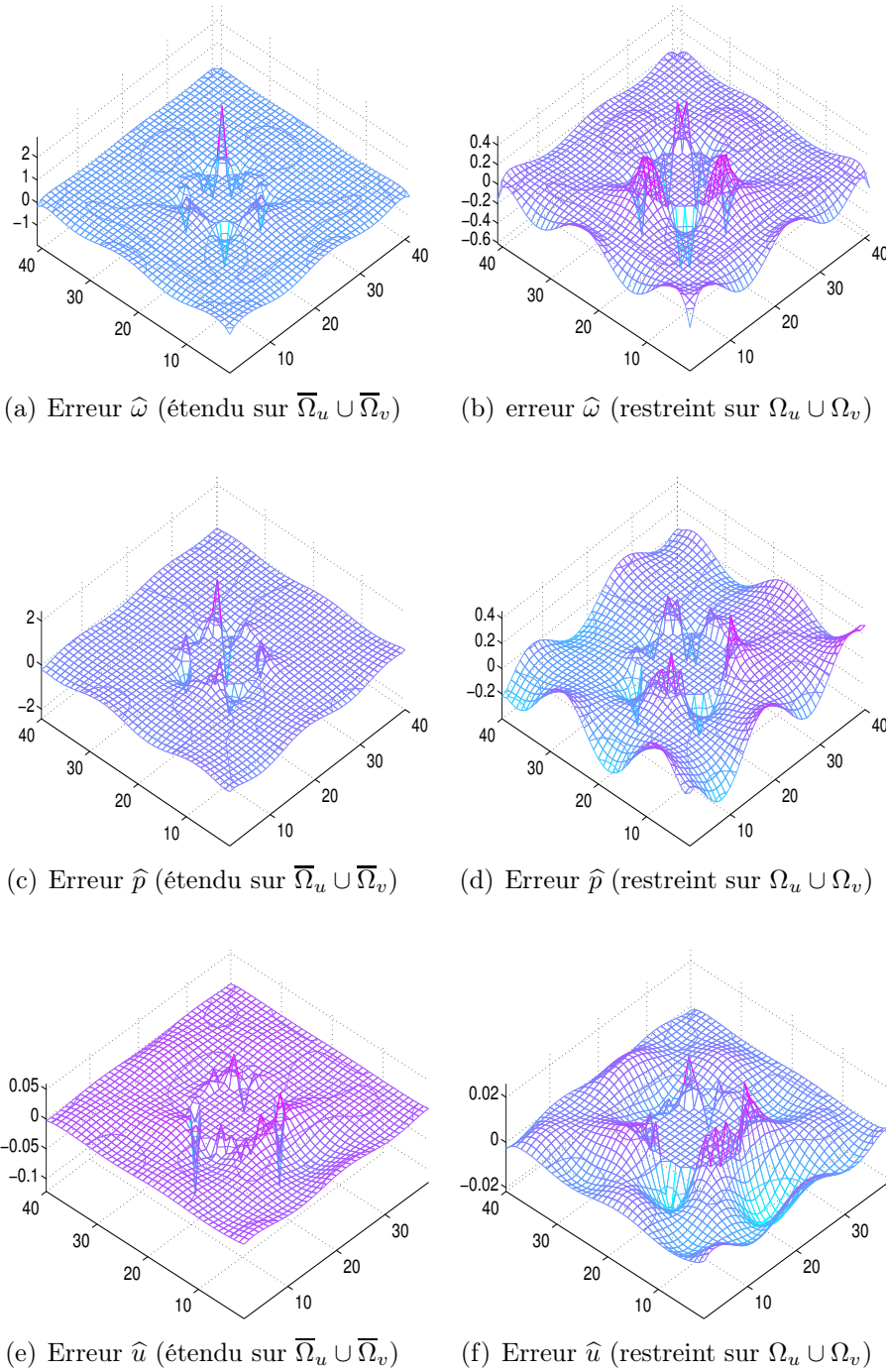


FIG. 6.25 – La colonne de gauche donne les résultats pour l'implémentation en domaine étendu calculé sur l'espace $\overline{\Omega}_u \cup \overline{\Omega}_v$ et à droite dans le domaine étendu restreint sur les points de $\Omega_u \cup \Omega_v$. De haut en bas : représentation spatiale (resp.) de l'erreur relative des champs $\hat{\omega}_{i,j} = \omega^{\text{gs}}(x_i, y_j) - \omega_{i,j}$, $\hat{p}_{i,j} = p^{\text{gs}}(x_i, y_j) - p_{i,j}$ et $\hat{u}_{i,j} = u^{\text{gs}}(x_i, y_j) - u_{i,j}$ dans un domaine carré avec une inclusion de résolution 40×40 à $t=1$.

6.4.3 Forçage de la condition de Dirichlet sur ψ

Nous chercherons donc à forcer l'égalité $\psi^{n+1} = \psi(t^{n+1})$ sur $\partial\Omega$. Pour cela, on voudrait pouvoir discrétiser le terme ψ_t de la condition de bord (6.52), sous la forme :

$$\psi_t \sim \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t}$$

Le problème est de calculer une valeur "extrapolée" de ψ à partir du champ de vitesse. Comme on cherche $[\![\phi]\!] = [\![\omega - \psi_t]\!]$ à l'ordre 2, on a besoin de $[\![\psi^n]\!]$ à l'ordre 4. Sur une cellule qui coupe une inclusion comme dans les cas illustrés figure 6.8, on utilisera une intégrale de contour le long de e.g. A', B, C, D' , dans le cas illustré à gauche de la figure. Ainsi sur cette cellule

$$[\![\psi^n]\!] = \int_{A'}^B \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_B^C \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_C^{D'} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{D'}^{A'} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.54)$$

Pour calculer ces intégrales à l'ordre 4, nous avons besoin d'utiliser des développements limités de (u, v) , à l'ordre 3. Nous voyons cependant que cela ne sera praticable que quand on travaille en domaine étendu. Nous devons abandonner à ce stade la méthode basée sur le domaine strict, c'est à dire celle qui utilise les mêmes points que ceux de l'implémentation de $\phi - \psi$. Pour calculer $[\![\psi^n]\!]$, nous allons utiliser un champ de vitesse $\tilde{\mathbf{u}}$ corrigé de sorte que $[\![\psi^n]\!] = \text{div}(\theta \tilde{\mathbf{u}})$ soit à l'ordre suffisant.

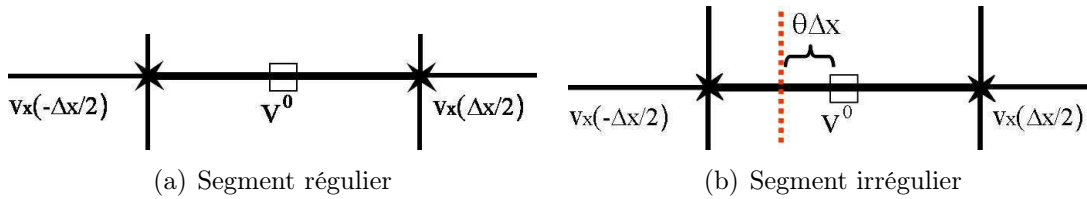


FIG. 6.26 – Position des champs v_x sur un segment

En effet, sur tous les segments qui interviendront dans les expressions de la forme (6.54), on pourra obtenir un développement à l'ordre 3 de u ou v , en faisant intervenir leur gradient aux extrémités des segments :

Sur un segment régulier, (figure 6.26-gauche) on écrira les développements limités sur le champ ψ au point $-\Delta x/2$ et $\Delta x/2$ centrés sur v^0 puis nous repasserons en variables primitives (u, v) en utilisant la relation (2.9) qui relie la fonction de courant

à son champ de vitesse associé. Ainsi nous obtenons :

$$\frac{\psi(\Delta x/2) - \psi(-\Delta x/2)}{\Delta x} = \psi_x^0 + \frac{\Delta x^2}{24} \psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \quad (6.55)$$

et on peut écrire

$$\psi_{xxx}^0 = \frac{\psi_{xx}(\Delta x/2) - \psi_{xx}(-\Delta x/2)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (6.56)$$

Sur chaque segment, on veut pouvoir écrire :

$$\psi(\Delta x/2) - \psi(-\Delta x/2) = \Delta x \tilde{v}^0 \quad (6.57)$$

En faisant le remplacement $v = \psi_x$, nous trouvons alors :

$$\tilde{v}^0 = v^0 + \Delta x \frac{v_x(-\Delta x/2) - v_x(\Delta x/2)}{24} + O(\Delta x^4) \quad (6.58)$$

où \tilde{v}^0 est une vitesse corrigée sur le bord à l'ordre 4. Sur un segment irrégulier, (figure 6.26-droite), on écrira :

$$\begin{cases} \psi(-\theta\Delta x) = \psi^0 - \theta\Delta x\psi_x^0 + \frac{\theta^2\Delta x^2}{2}\psi_{xx}^0 - \frac{\theta^3\Delta x^3}{6}\psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ \psi_x(\Delta x/2) = \psi_x^0 + \frac{\Delta x}{2}\psi_{xx}^0 + \frac{\Delta x^2}{8}\psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^4) \\ \psi_x(-\theta\Delta x) = \psi_x^0 - \theta\Delta x\psi_{xx}^0 + \frac{\theta^2\Delta x^2}{2}\psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^3) \end{cases}$$

Par combinaison linéaire, on obtient

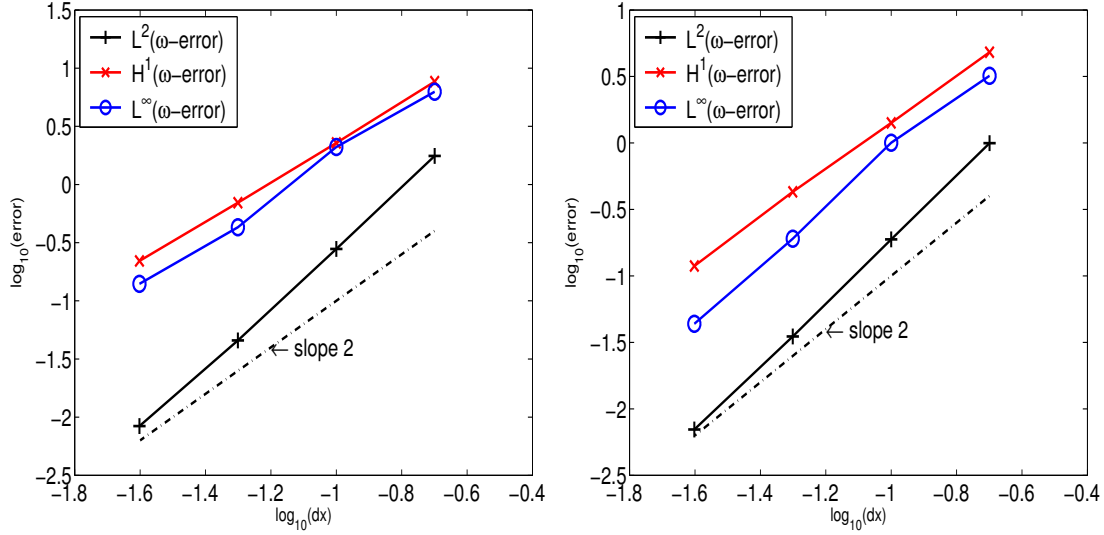
$$\frac{\psi(-\theta\Delta x) - \psi(\Delta x/2)}{\theta\Delta x} = \psi_x^0 + \frac{\Delta x}{2}(\theta - 1)\psi_{xx}^0 + \frac{\Delta x^2}{6}(\theta^2 - \frac{3\theta}{2} + \frac{3}{4})\psi_{xxx}^0 + O(\Delta x^3)$$

et en remplaçant v par ψ_x , nous trouvons alors :

$$\tilde{v}^0 = v^0 + \frac{\alpha\Delta x}{2}(v_x(\Delta x/2) + v_x(-\Delta x/2)) + \beta\Delta x^2(v_x(\Delta x/2) - v_x(-\Delta x/2)) \quad (6.59)$$

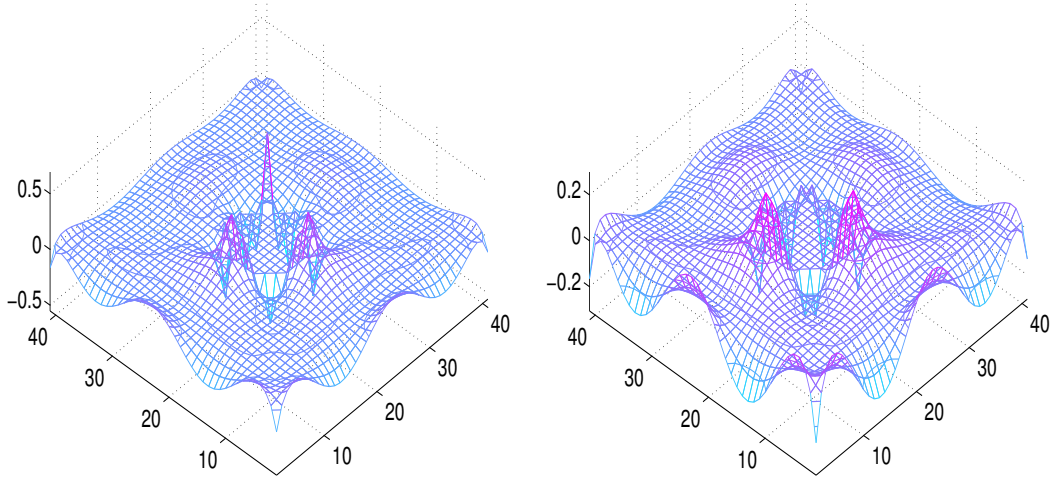
où $\alpha = \frac{\theta - 1}{2}$ et $\beta = \frac{\theta^2 - 3\theta/2 + 3/4}{6}$.

Ce qui est important ici, c'est que les points où l'on calcule v_x sont aussi des points de $\overline{\Omega}_\omega$, et donc on peut utiliser les extrapolations introduites section 6.3.2 pour les calculer.



(a) Erreur sur ω sur le domaine étendu portant sur les points $\bar{\Omega}_u \cup \bar{\Omega}_v$

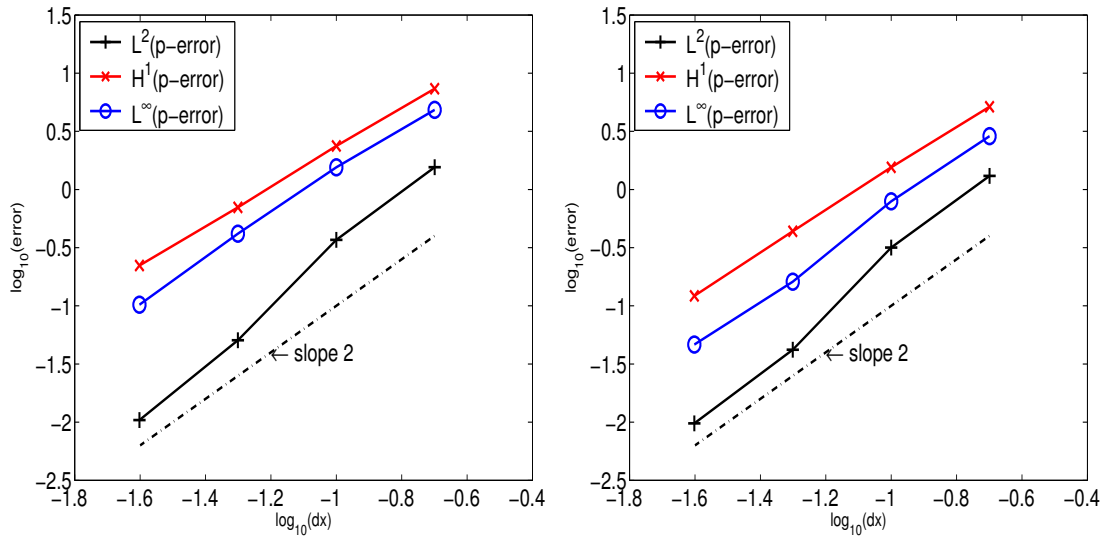
(b) Erreur sur ω sur le domaine étendu portant sur les points $\Omega_u \cup \Omega_v$



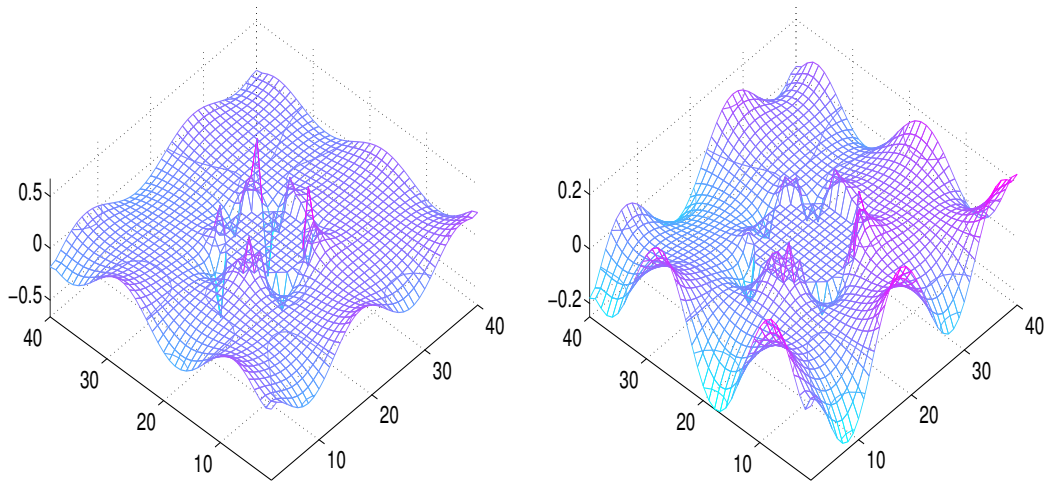
(c) Map de l'erreur sur le domaine étendu représentation sur les points $\bar{\Omega}_u \cup \bar{\Omega}_v$

(d) Map de l'erreur sur le domaine étendu représentation sur les points $\Omega_u \cup \Omega_v$

FIG. 6.27 – La colonne de gauche donne les résultats dans le domaine étendu et à droite dans le domaine strict. En haut : étude de convergence du champ de vorticité ω sur un domaine carré avec une inclusion à $t=1$. En bas : représentation spatiale de l'erreur relative des champs $\hat{\omega}_{i,j} = \omega^{gs}(x_i, y_j) - \omega_{i,j}$ dans un domaine carré avec une inclusion de résolution 40×40 à $t=1$.

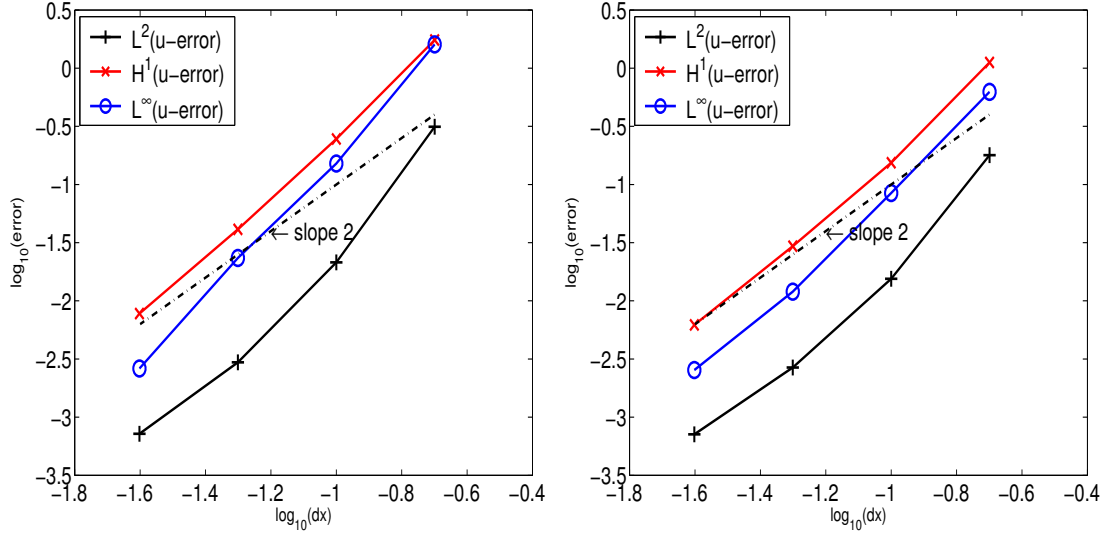


(a) Erreur sur p sur le domaine étendu portant sur les points $\bar{\Omega}_u \cup \bar{\Omega}_v$ (b) Erreur sur p sur le domaine étendu portant sur les points $\Omega_u \cup \Omega_v$

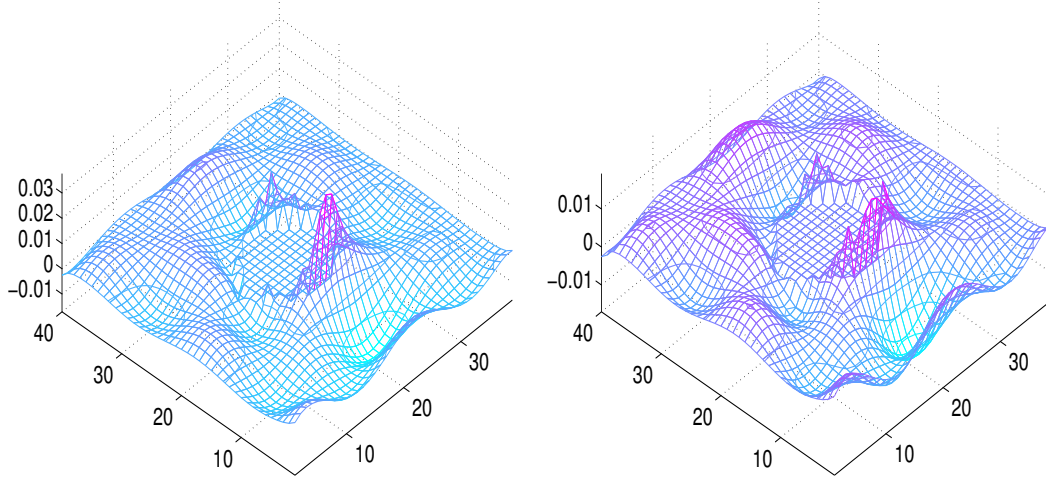


(c) Map de l'erreur sur le domaine étendu représentation sur les points $\bar{\Omega}_u \cup \bar{\Omega}_v$ (d) Map de l'erreur sur le domaine étendu représentation sur les points $\Omega_u \cup \Omega_v$

FIG. 6.28 – La colonne de gauche donne les résultats dans le domaine étendu et à droite dans le domaine strict. En haut : étude de convergence du champ de pression p sur un domaine carré avec une inclusion à $t=1$. En bas : représentation spatiale de l'erreur relative des champs $\hat{p}_{i,j} = p^{\text{gs}}(x_i, y_j) - p_{i,j}$ dans un domaine carré avec une inclusion de résolution 40×40 à $t=1$.

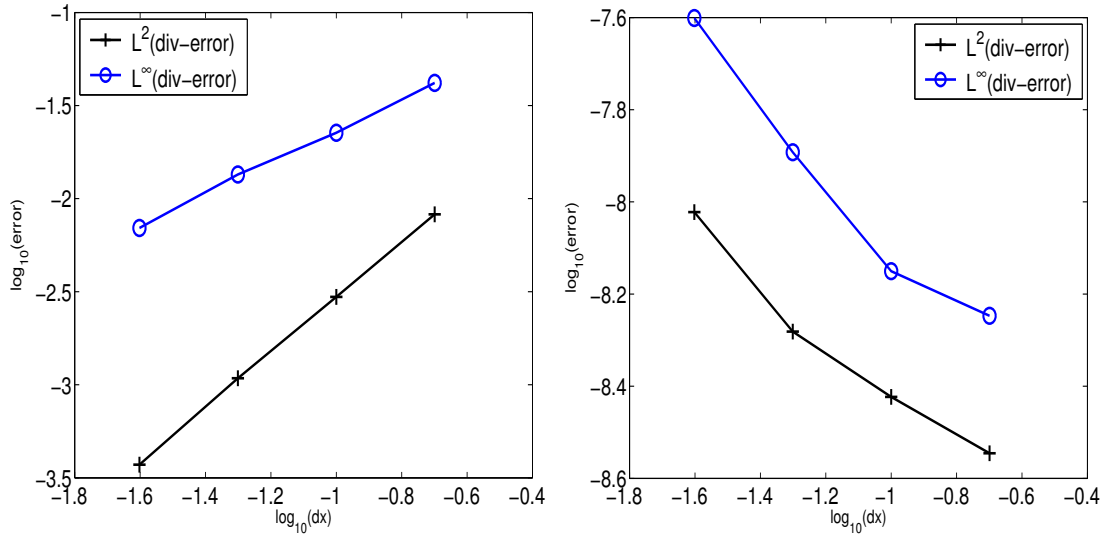


(a) Erreur sur u sur le domaine portant sur les points $\bar{\Omega}_u \cup \bar{\Omega}_v$ (b) Erreur sur u sur le domaine étendu portant sur les points $\Omega_u \cup \Omega_v$



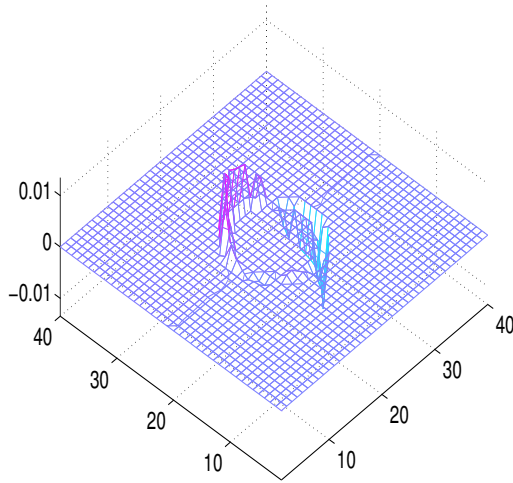
(c) Map de l'erreur sur le domaine étendu représentation sur les points $\bar{\Omega}_u \cup \bar{\Omega}_v$ (d) Map de l'erreur sur le domaine étendu représentation sur les points $\Omega_u \cup \Omega_v$

FIG. 6.29 – La colonne de gauche donne les résultats dans le domaine étendu et à droite dans le domaine strict. En haut : étude de convergence de la composante en vitesse u sur un domaine carré avec une inclusion à $t=1$. En bas : représentation spatiale de l'erreur relative des champs $\hat{u}_{i,j} = u^{\text{gs}}(x_i, y_j) - u_{i,j}$ dans un domaine carré avec une inclusion de résolution 40×40 à $t=1$.

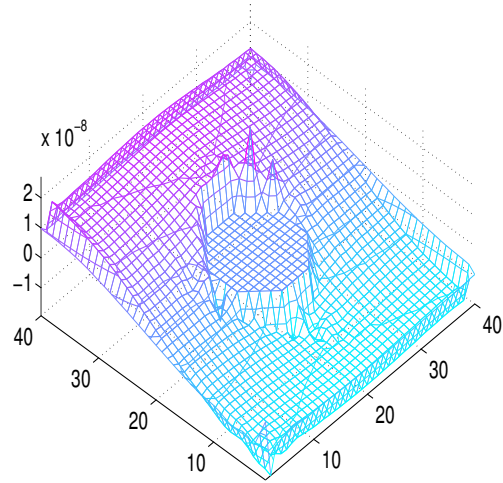


(a) Erreur sur $\text{div} u$ sur le domaine étendu portant sur les points $\overline{\Omega}_u \cup \overline{\Omega}_v$

(b) Erreur sur $\text{div} u$ sur le domaine étendu portant sur les points $\Omega_u \cup \Omega_v$



(c) Map de l'erreur sur le domaine étendu représentation sur les points $\overline{\Omega}_u \cup \overline{\Omega}_v$



(d) Map de l'erreur sur le domaine étendu représentation sur les points $\Omega_u \cup \Omega_v$

FIG. 6.30 – Etude des normes de l'erreur sur le champ de divergence dans un domaine carré avec une particule à $t=1$

6.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré comment nous pouvions implémenter une méthode de simulation directe qui soit convergente à l'ordre 2 en vitesse et $3/2$ en pression (en norme L^2 , L^∞ et H^1). Notre implémentation a été testée dans le cas du problème de Stokes mais son extension aux équations de Navier-Stokes ne posent pas de problème de principe. Plus délicat sera le passage en 3 dimensions, puisque nous utilisons les valeurs d'un champ potentiel au bord des inclusions. Cependant l'introduction de fonction de courant n'a d'autre objet que de garantir que le solveur de Poisson Neumann reste toujours bien posé. Il semble donc que l'extension de cette technique à 3D doit être accessible à une fonction de courant qui peut toujours être calculée sur une surface moyennant le choix de jauge qui doit être non pertinent.

Un intérêt notable de cette méthode c'est qu'en étendant les champs au-delà de l'interface on peut obtenir des valeurs très près du bord tout en restant convergent à un ordre élevé. Notons que nous n'écrivons jamais directement de condition sur p au bord. Le seul champ extrapolé sur l'interface étant ω (et ψ_t).

Chapitre 7

Applications

Sommaire

7.1	Théorie	174
7.2	Résultats numériques	175
7.3	Perspectives	186

7.1 Théorie

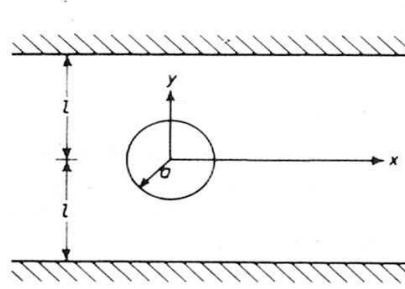


FIG. 7.1 – Géométrie du problème : translation d'un cylindre circulaire entre deux plans parallèles

Nous avons validé notre algorithme –développé dans le chapitre "hybride"– sur le calcul du coefficient de trainée en régime de Stokes. Si la résolution du problème de Stokes autour d'une sphère en milieu infini, en trois dimensions, est un résultat bien connu, ce calcul ne s'adapte pas en deux dimensions. Le problème à deux dimension est mal posé (paradoxe de Stokes), les conditions de vitesse au bord du grain et à l'infini étant incompatibles. Il n'y a donc pas de solution au problème de Stokes en milieu infini à deux dimensions. A deux dimensions, nous sommes contraints d'étudier des situations telles que celle dépeinte figure 7.1. Il n'y a pas de solution exacte connue pour ce problème, mais la force exercée par le fluide sur le grain peut être obtenue par des méthodes asymptotiques. Une expression due à Faxen [21] est valable dans la limite où le diamètre du grain est faible par rapport à la largeur du canal. Cette expression satisfait l'équation bi-harmonique pour la fonction de courant ψ , obtenue à partir des équations de Stokes.

$$\Delta^2 \psi = 0 \quad (7.1)$$

Les conditions aux limites pour cette fonction de courant sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi = 0 \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 & \text{sur les parois en } y = \pm 1 \\ \psi = Uy \text{ et } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 & \text{sur le cylindre } x^2 + y^2 = a^2 \\ \psi \rightarrow 0 & \text{quand } |x| \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (7.2)$$

La solution du problème (7.1)-(7.2) est cherchée sous la forme de développement

de série [31]. Faxen [21] a montré que la force de trainée pouvait alors être calculée perturbativement en fonction de paramètre $k = a/l$:

$$C(k) = \frac{F_x(k)}{\mu U} = \frac{4\pi}{A_0 - \ln(k) + A_2 k^2 + A_4 k^4 + A_6 k^6 + A_8 k^8} \quad (7.3)$$

$$\text{où } \begin{cases} A_0 = -0.9156892732 \\ A_2 = 1.7243844 \\ A_4 = -1.730194 \\ A_6 = 2.405644 \\ A_8 = -4.59131 \end{cases} \quad (7.4)$$

Nous allons chercher à comparer cette expression avec des données de simulations numériques : F_x sera calculé en utilisant l'expression :

$$F = \oint_{\Gamma} \Pi dS \quad (7.5)$$

où Π est le tenseur des contraintes à l'intérieur du fluide :

$$\Pi = \begin{pmatrix} -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

La conservation de la quantité de mouvement nous indique par ailleurs qu'en régime de Stokes, cette force peut être calculée en utilisant n'importe quel contour Γ entourant le grain. Nous avons donc utilisé plusieurs contours simples pour tester différentes méthodes d'évaluation de l'intégrale (7.5).

7.2 Résultats numériques

Nous avons implémenté l'écoulement plan dans un canal de largeur variable $2l$ avec un grain fixe au centre (de rayon constant $a = 0.8mm$) et nous calculons la force appliquée par le fluide interstitiel sur différents contours autour du grain (les différents contours donnent des résultats identiques). Le protocole de nos simulations numériques consiste à faire varier k en ne modifiant que la largeur du canal –la longueur du canal est fixe $L = 3mm$ –, cette méthode est inspirée par Ben Richou et al. [57]. Nous fixons N_x et N_y de telle manière à garder un pas d'espace régulier $\Delta x = \Delta y = 2.0 \times 10^{-4}$, la condition de type CFL nous impose un pas de temps Δt

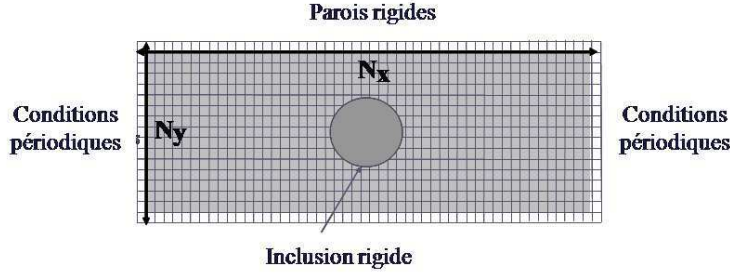


FIG. 7.2 – Représentation du domaine et des conditions aux limites

de l'ordre de 5×10^{-3} . La figure 7.3 représente le coefficient de traînée pour différentes valeurs de k , en comparant nos résultats numériques à la formule de Faxen et aux résultats présentés dans [57]. Nos résultats sont précis à 2% près pour $k < 0.5$. Lorsque k tend vers 1, le cylindre devient très proche des parois, et la formule de Faxen n'est plus valable (voir figure 7.4).

Cependant, d'autres expressions analytiques nous permettent encore de tester notre algorithme. Les effets hydrodynamiques étant localisés dans une très petite surface entre le cylindre et la paroi, le coefficient de traînée est obtenue dans une approximation de lubrification. Le calcul proposé par Bungay et Brenner [9] donne :

$$C(\varepsilon) = 9\pi\sqrt{2}\varepsilon^{-5/2} + 24B\varepsilon^{-2} + 6\pi\sqrt{2}\varepsilon^{-3/2} + (24C + 12D)\varepsilon^{-1} + 2\pi\sqrt{2}\varepsilon^{-1/2} + \dots \quad (7.7)$$

où $\varepsilon = (1 - k)/k$ où B , C et D sont des constantes d'intégration. Dans cette approximation, on connaît les différentes contributions au coefficient de traînée, pour la pression on a :

$$C(\varepsilon) = 9\pi\sqrt{2}\varepsilon^{-5/2} + 24B\varepsilon^{-2} + 24C\varepsilon^{-1} + \dots \quad (7.8)$$

tandis que la contribution des gradients de vitesse s'écrit :

$$C(\varepsilon) = 6\pi\sqrt{2}\varepsilon^{-3/2} + 12D\varepsilon^{-1} + 2\pi\sqrt{2}\varepsilon^{-1/2} + \dots \quad (7.9)$$

La figure 7.5 montre que lorsque $k \rightarrow 1$, nos résultats numériques reproduisent effectivement le comportement asymptotique prédit par la formule de lubrification (7.7). La simulation d'un écoulement pour $k < 2$ dans une canal de taille 150×50 nous permet d'être précis à moins 1%. Avec cette précision, nous pouvons simuler 100

secondes de temps réel en 15 min de temps de calcul sur un processeur AMD-Opteron275 à 1.8Ghz. Nous présentons figures 7.7-7.8, les résultats numériques de cette simulation pour les champs de vitesse, de vorticité et de pression.

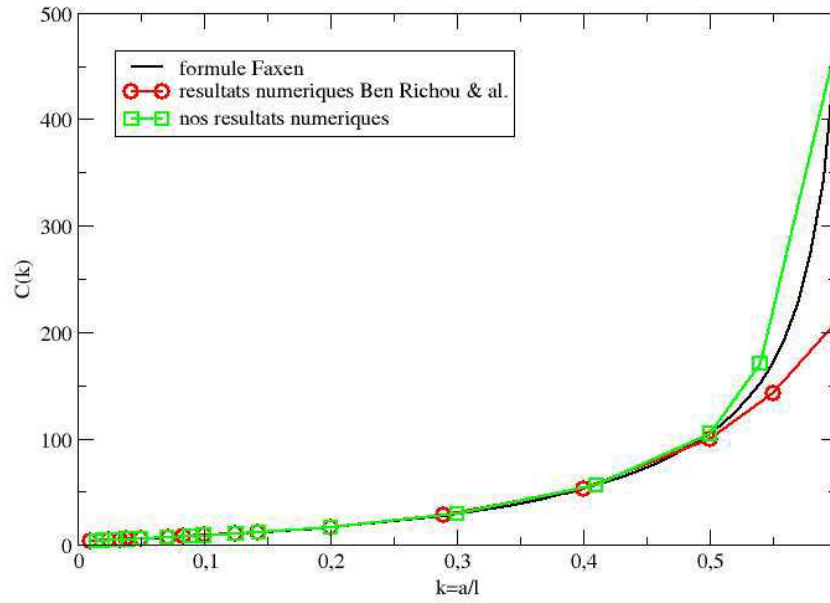


FIG. 7.3 – Comparaison entre nos résultats numériques, les résultats des simulations numériques de Ben Richou et al. [57] et la formule de Faxen (7.3) suivant k qui est le ratio entre la largeur du canal sur le diamètre de la particule

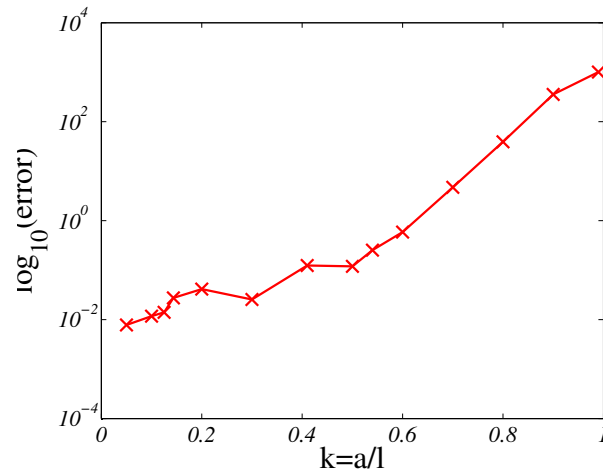


FIG. 7.4 – Etude de l'erreur relative entre l'expression analytique de la formule de Faxen (7.3) et nos résultats numériques.

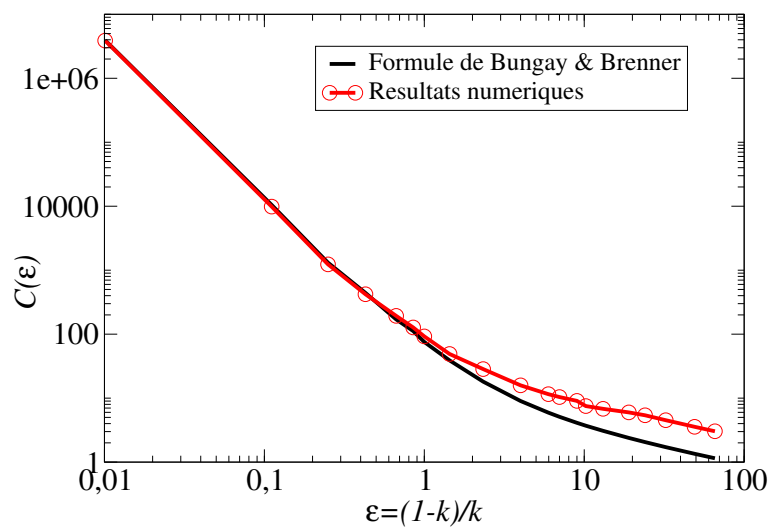


FIG. 7.5 – Comparaison entre nos résultats numériques et la formule de Bungay et Brenner (7.7) suivant ε

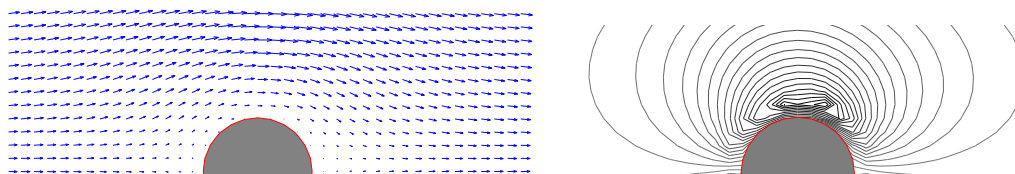


FIG. 7.6 – Représentation du champ de vitesse (à gauche) et du champ de vortacité (à droite) autour de la particule

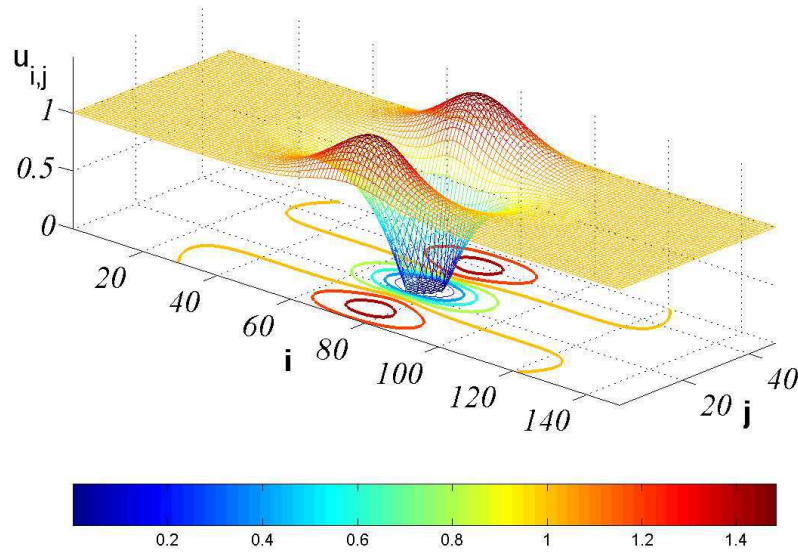
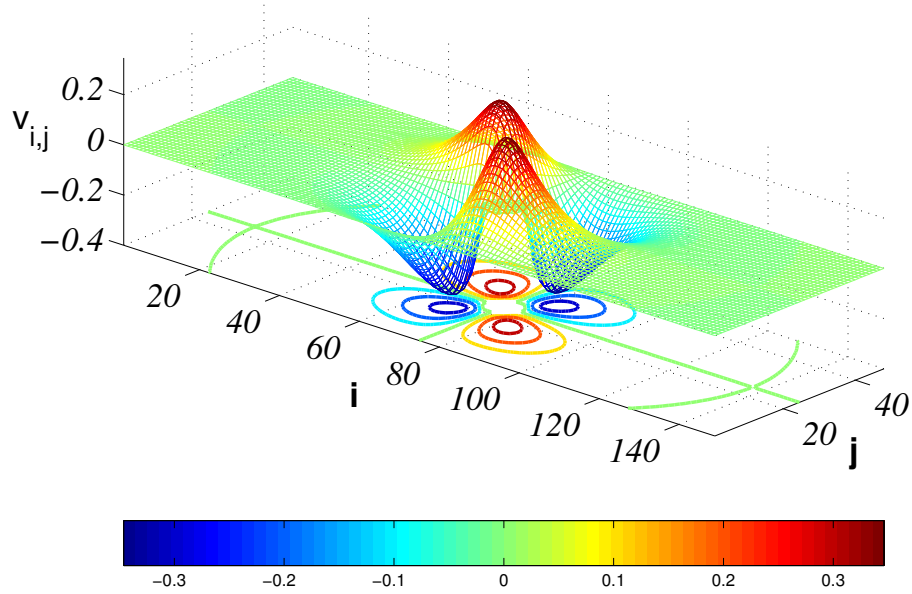
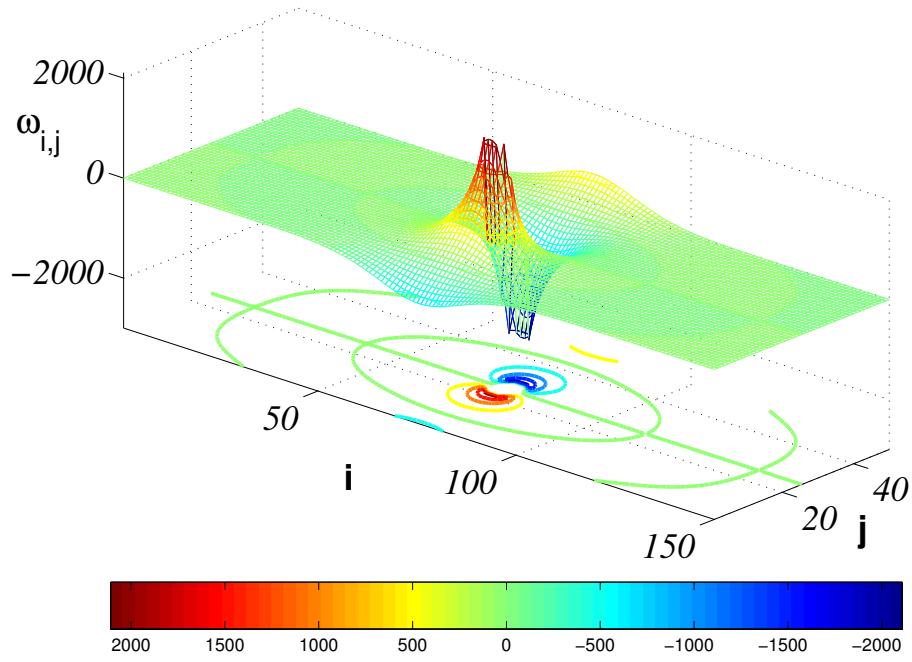
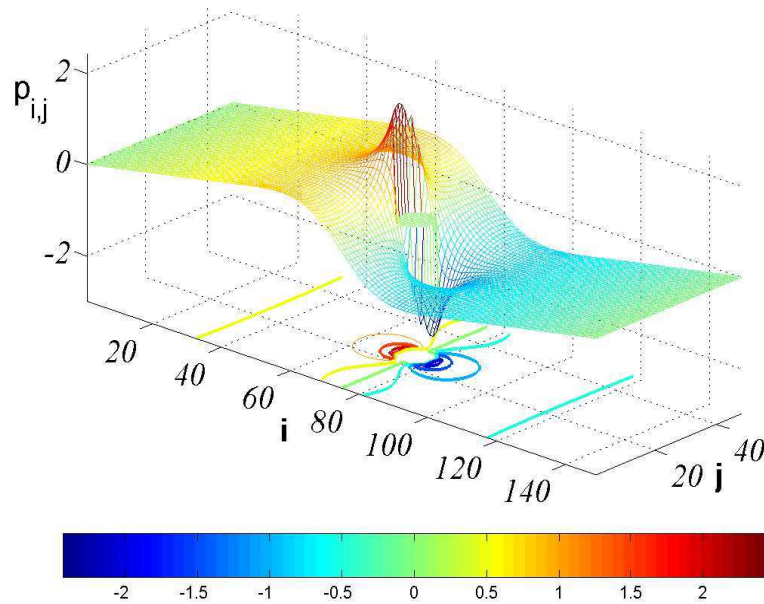
(a) Représentation de la composante u du champ de vitesse(b) Représentation de la composante v du champ de vitesse

FIG. 7.7 – Représentation spatiale des champs de vitesse (figure (a) composante u et figure (b) composante v) dans un domaine rectangulaire périodique de résolution 150×50 avec une particule cylindrique ayant un diamètre de 8 mailles à $t=100$. L'écoulement est entraîné par les parois suivant les i croissants.



(a) Représentation du champ de vorticité



(b) Représentation du champ de pression

FIG. 7.8 – Représentation spatiale des champs de vorticité (a) et de pression (b) dans un domaine rectangulaire périodique de résolution 150×50 avec une particule cylindrique ayant un diamètre de 8 mailles à $t=100$. L'écoulement est entraîné par les parois suivant les i croissants.

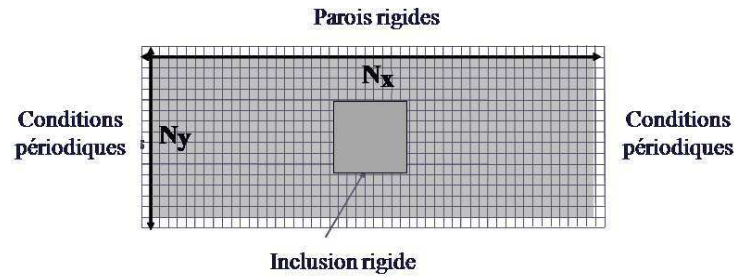


FIG. 7.9 – Représentation du domaine et des conditions aux limites

Nous avons également calculé le coefficient de traînée sur une particule de forme carré en écoulement frontal. La figure 7.11 montre que le coefficient de traînée de la particule de forme carré est plus grand que celui de forme cylindrique. Nous présentons également figures 7.12-7.13, les résultats numériques pour les champs de vitesse, de vorticité et de pression, pour la simulation d'un écoulement pour $k < 2$ dans une canal de taille 150×50 à $t = 100$.

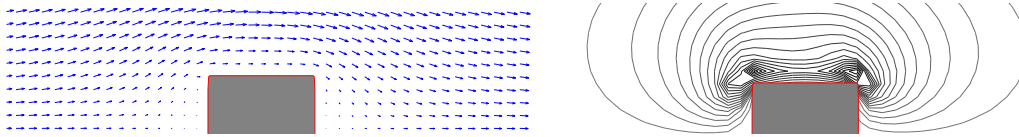


FIG. 7.10 – Représentation du champ de vitesse (  gauche) et du champ de vorticité (  droite) autour de la particule

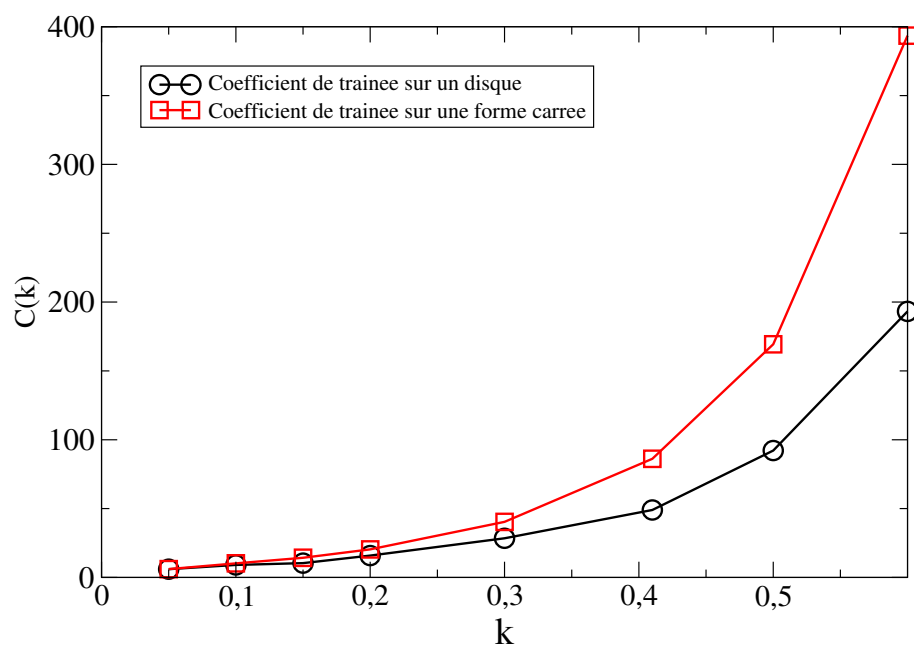


FIG. 7.11 – Représentation des résultats numériques du coefficient de trainée sur une particule de forme cylindrique (de rayon a) et sur une particule de forme carré (de côté $2a$) suivant k .

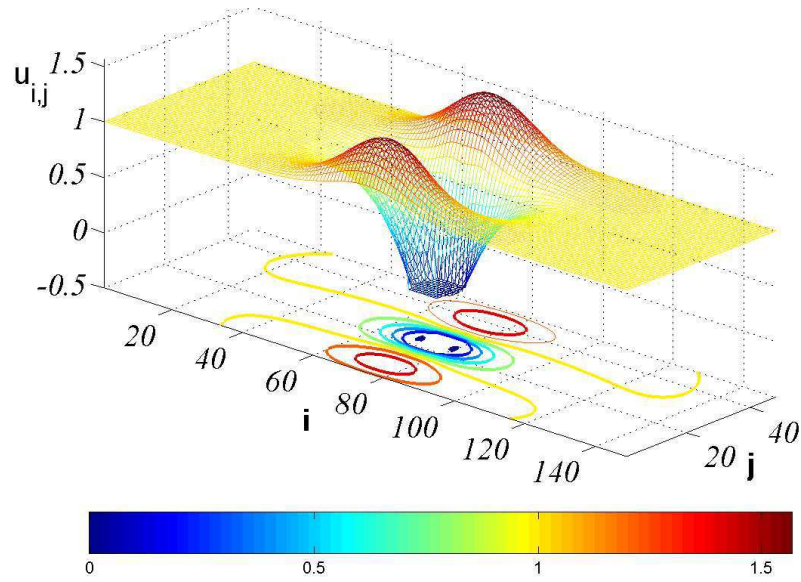
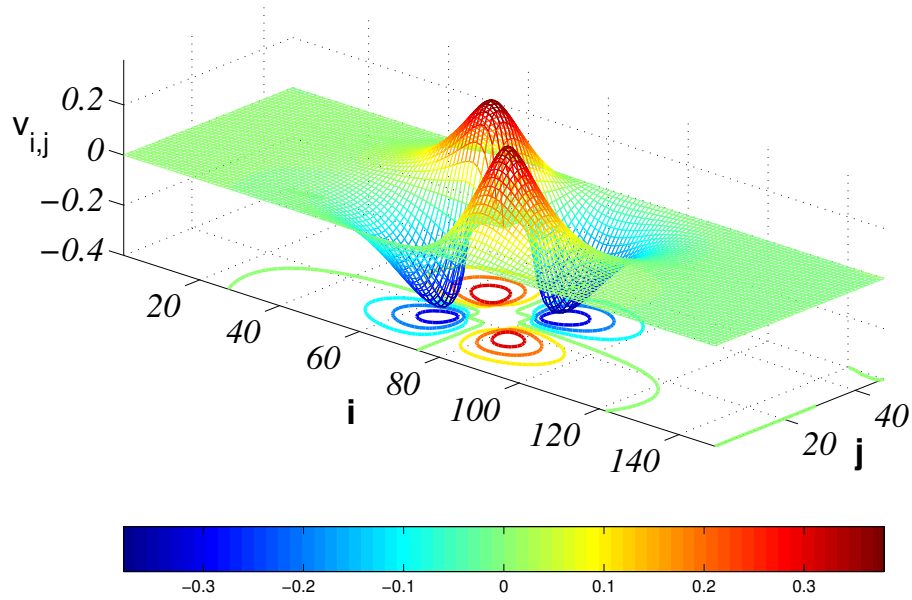
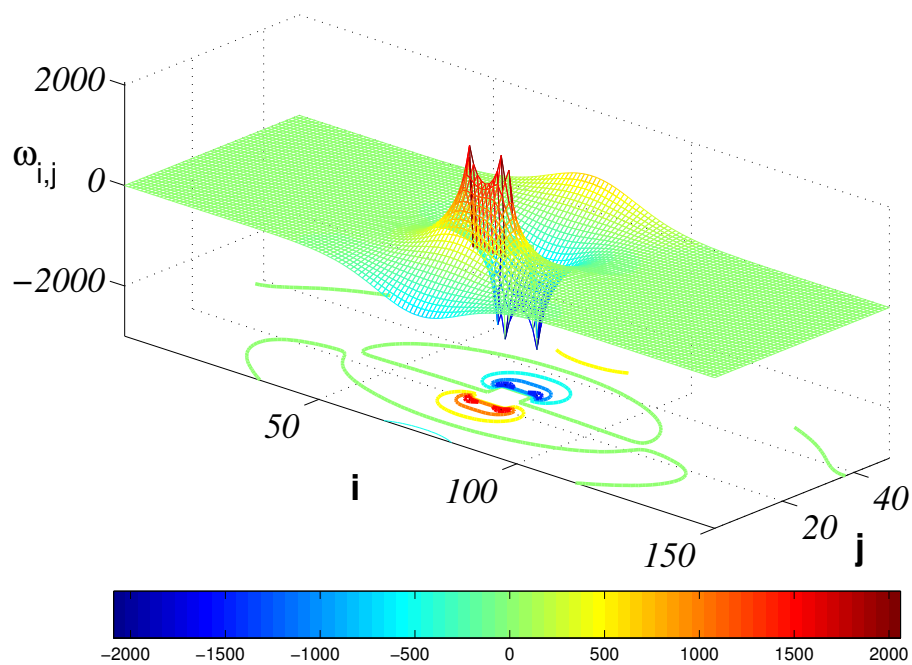
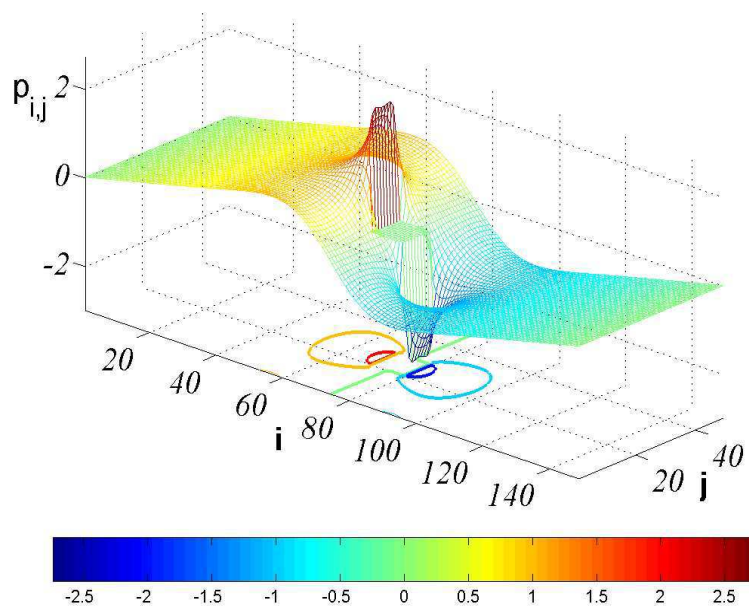
(a) Représentation de la composante u du champ de vitesse(b) Représentation de la composante v du champ de vitesse

FIG. 7.12 – Représentation spatiale des champs de vitesse (figure (a) composante u et figure (b) composante v) dans un domaine rectangulaire périodique de résolution 150×50 avec une particule de forme carré de côté 8 mailles à $t=100$. L'écoulement est entraîné par les parois suivant les i croissants.



(a) Représentation du champ de vorticité



(b) Représentation du champ de pression

FIG. 7.13 – Représentation spatiale des champs de vorticité (a) et de pression (b) dans un domaine rectangulaire périodique de résolution 150×50 avec une particule de forme carré de côté 8 mailles à $t=100$. L'écoulement est entraîné par les parois suivant les i croissants.

7.3 Perspectives

Une des perspectives accessibles assez rapidement consiste à étudier des problèmes d'écoulement de fluide en régime de Stokes dans un milieu poreux. A très court terme, nous projetons d'étudier la distribution des champs de vitesse à travers ce type de milieu. Pour valider nos résultats numériques nous comptons les comparer avec les résultats expérimentaux effectués par IRM au sein du LMSGC. Nous avons étudié un système simple composé de 18 inclusions de rayon 0.32 dans un domaine carré bipériodique représentatif de coté 10 de résolution 150×150 . Le fluide est entraîné par une force volumique $f_x = 10^{-2}$. Sur la figure 7.14, nous présentons le champ de vitesse et sur la figure 7.15, deux coupes au centre de la cellule de calcul, de la composante v du champ de vitesse. Nous donnons les courbes de niveau pour chacune des composantes du champ vitesse, de vorticité et de pression sur la figure 7.18.

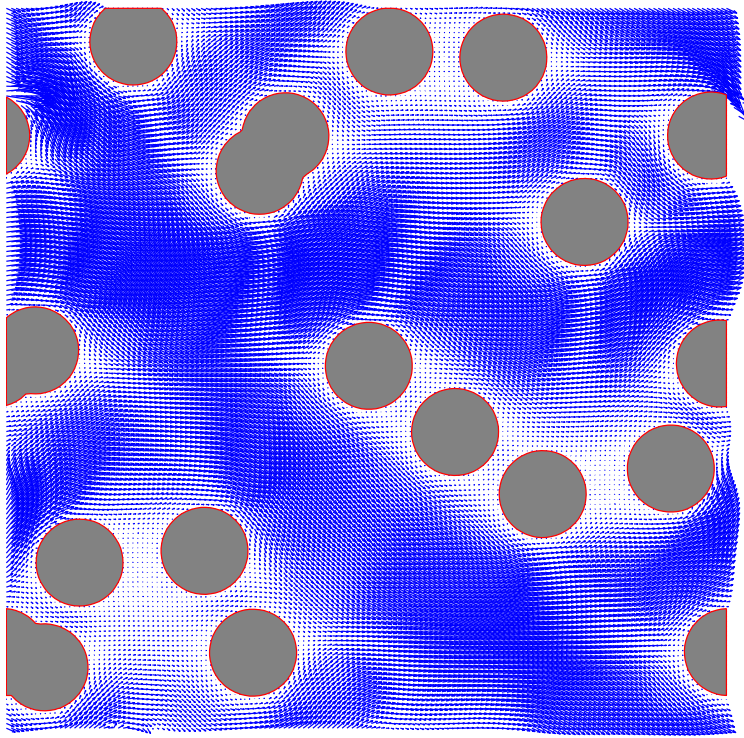
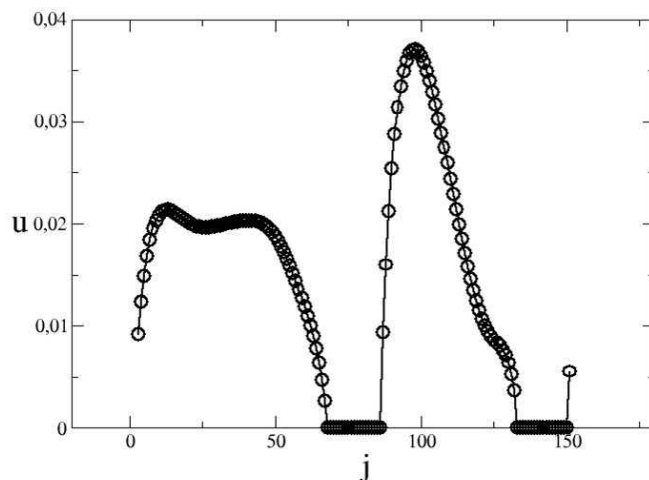
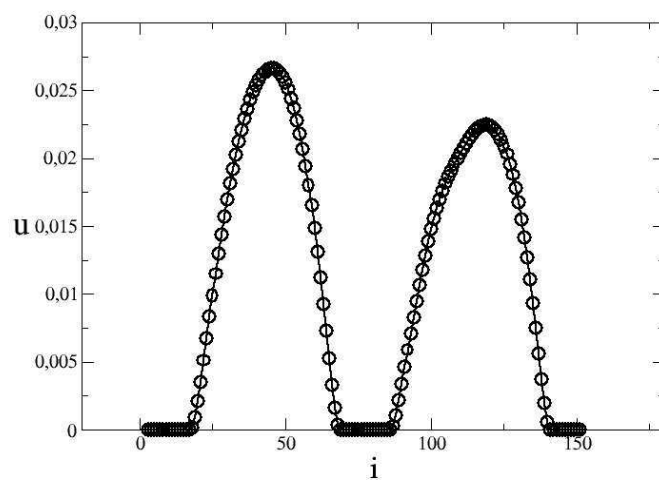


FIG. 7.14 – Représentation du champ de vitesse dans un poreux de 18 inclusions de forme cylindrique (de rayon 0.32) à $t=1$.

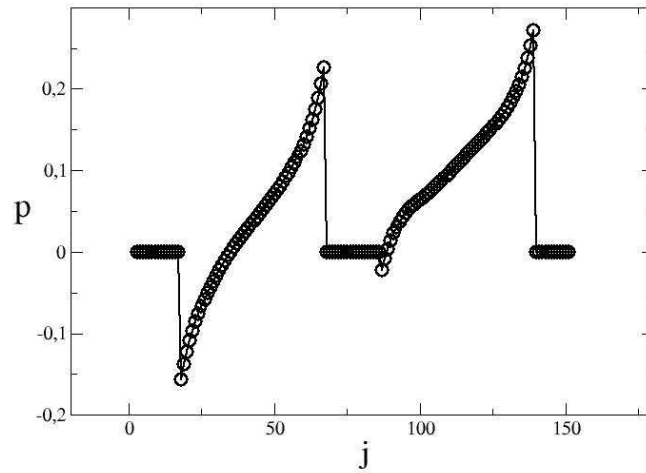


(a) Coupe en $i = N_x/2$ de la composante u du champ de vitesse

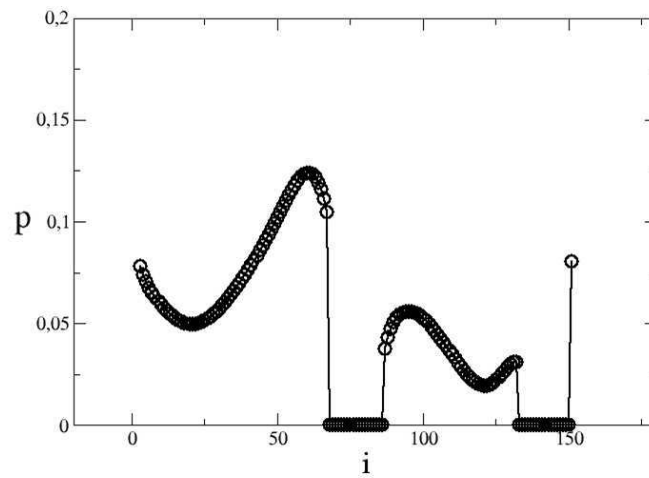


(b) Coupe en $j = N_y/2$ de la composante u du champ de vitesse

FIG. 7.15 – Coupe du champ de la composante u du champ de vitesse dans un poreux de 18 inclusions de forme cylindrique (de rayon 0.32) à $t=1$.



(a) Coupe en $i = N_x/2$ du champ de pression



(b) Coupe en $j = N_y/2$ du champ de pression

FIG. 7.16 – Coupe du champ de pression dans un poreux de 18 inclusions de forme cylindrique (de rayon 0.32) à $t=1$.

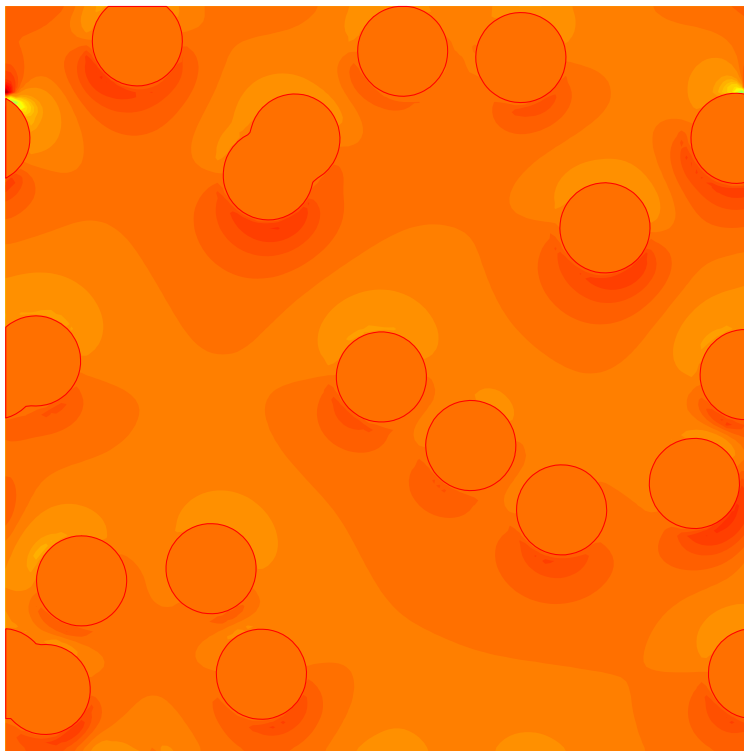
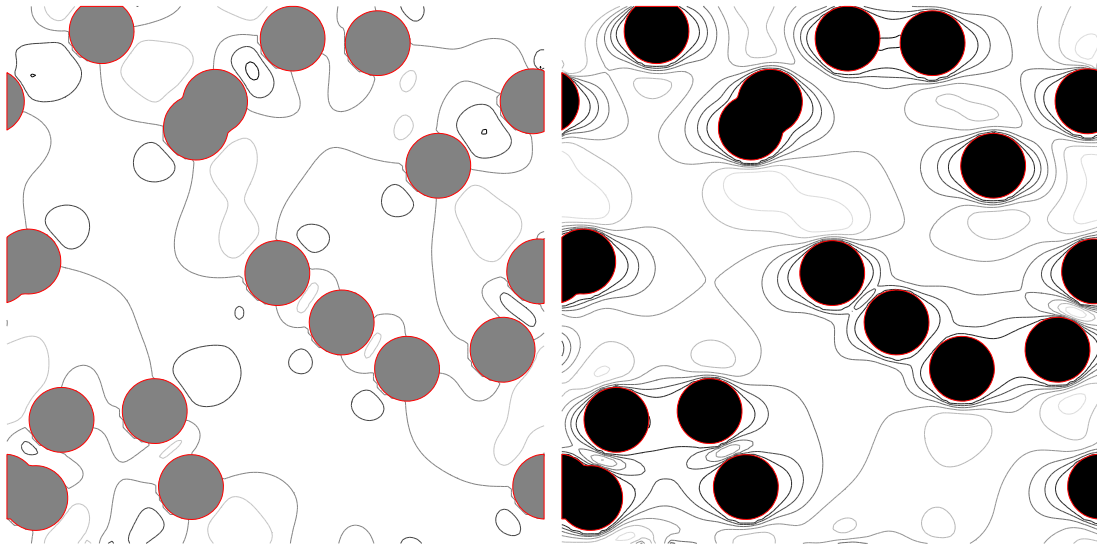
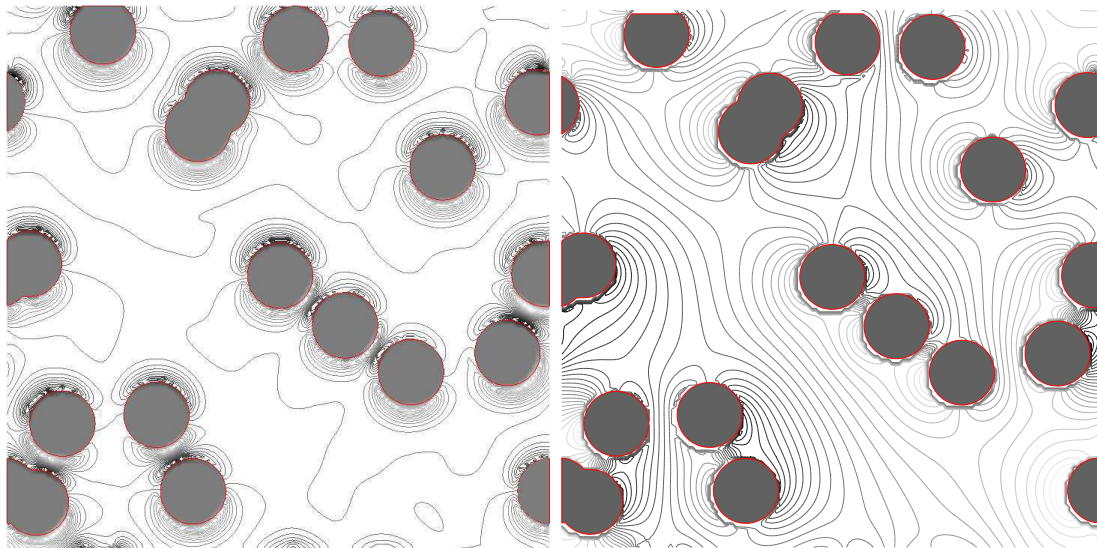


FIG. 7.17 – Représentation du champ de vorticité dans un poreux de 18 inclusions de forme cylindrique (de rayon 0.32) à $t=1$.



(a) Représentation de la composante u du champ de vitesse (b) Représentation de la composante v du champ de vitesse



(c) Représentation du champ de vorticité (d) Représentation du champ de pression

FIG. 7.18 – Représentation spatiale des champs de vitesse (figure (a) composante u et figure (b) composante v), de vorticité (a) et de pression (b) dans un domaine carré périodique de résolution 150×150 avec 18 inclusions de forme cylindrique de rayon 0.32 à $t = 1$. L'écoulement est entraîné par une force volumique $f_x = 10^{-2}$.

Conclusion

Deux schémas numériques ont été étudiées pour résoudre le problème de Stokes incompressible en différence finie sur un maillage cartésien fixe. L'enjeu est le traitement de condition au bord sur une interface non conforme au maillage. Cette étude a nécessité la construction d'un solveur de Poisson d'ordre 2 pour des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann. La première méthode repose sur une formulation utilisant une fonction de courant et une fonction conjuguée à la pression. Nous avons ensuite poursuivi avec une méthode pression-vitesse-vorticité, et avons identifié un blocage à l'implémentation d'un solveur pour le problème de Poisson Neumann. Ces méthodes reposent sur l'usage d'extrapolants permettant de calculer la vorticité à l'interface, dans l'esprit de nombreuses autres méthodes numériques [?, 17, 59] mais en introduisant que des conditions de bord locales. Nous avons systématiquement étudié un grand nombre de formes d'extrapolation pour conclure que seulement quelques unes permettaient d'obtenir une convergence à l'ordre voulu. finalement nous aboutissons à des algorithmes d'ordre 2 en vitesse en norme L^2 , H^1 et L^∞ , et d'ordre 2 en pression pour la norme L^2 et 3/2 en norme H^1 et L^∞ .

Beaucoup de travail restent encore à faire pour progresser dans l'implémentation de ces méthodes. En particulier, il faudrait traiter le terme de convection pour étudier les équations de Navier Stokes. Cela ne devrait pas poser de problème de principe. Plus délicat serait le passage à 3 dimensions même s'il semble très accessible, dans la méthode en vitesse-pression-vorticité, à une fonction de courant qui peut toujours être calculée sur une surface moyennant le choix de jauge pertinent.

Restent encore les questions techniques d'implémentations. Une étude comparative plus précise de nos schémas avec ceux de Ben-Artzi [2, 3], d'Orzag [40] et de Guermond [28–30] et leurs collaborateurs, permettraient d'aborder une analyse mathématique approfondie de nos choix d'implémentation.

Nous avons validé notre algorithme en pression-vitesse-vortacité sur un problème d'écoulement d'un fluide newtonien autour d'un obstacle cylindrique dans un canal périodique en régime de Stokes. Nous avons également vérifié que notre algorithme était capable de traiter des configurations comme une écoulement de fluide autour d'une particule de forme carré sans présenter de singularités.

Bibliographie

- [1] J.B. Bell, P. Colella, and H.M. Glaz. A second-order projection method for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of computational physics*, 85 :257–283, 1985.
- [2] M. Ben-Artzi, J.P Croisille, and D. Fishelov. Convergence of a compact scheme for the pure streamfunction formulation of the unsteady navier-stokes system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44 :1997–2024, 2006.
- [3] M. Ben-Artzi, D. Fishelov, and S. Trachtenberg. Vorticity dynamics and numerical resolution of navier-stokes equations. *Model. Math. Anal. Numér.*, 35 :313–330, 2001.
- [4] J. Blasco, R. Codina, and A. Huerta. a fractional-step method for the incompressible navier-stokes related to predictor multicorrector algorithm. *International journal for numerical methods in fluids*, 28 :1391–1419, 1998.
- [5] M. Bonnet. *Equations intégrales et éléments de frontière : Applications en mécanique des solides et des fluides*. Eyrolles, 1995.
- [6] O. Botella. *Résolution des équations de Navier Stokes par des schémas de Projection Tchebychev*. Rapport Inria, 1996.
- [7] O. Botella and Y. Cheny. The ls-stag method : a new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex geometries. *CFM*, 18, 2007.
- [8] D.L. Brown, R. Cortez, and M.L. Minion. Accurate projection methods for incompressible navier-stokes. *Journal of computational physics*, 168 :467–499, 2001.
- [9] P.M. Bungay and H. Brenner. The motion of a closely fitting sphere in a fluid-filled tube. *International Journal of Multiphase Flow*, pages 1–25, 1973.

- [10] D. Calhoun. A cartesian grid method for solving the two-dimensional streamfunction-vorticity equations in irregular regions. *Journal of computational physics*, 176 :231–275, 2002.
- [11] R. Celorrio, V. Dominguez, and F.-J. Sayaz. An interior-exterior schwarz algorithm and its convergence. *C. R. acad. Sci. Paris*, 1334, 2002.
- [12] A.J. Chorin. Numerical solution of the navier stokes equations. *Math. Comput.*, 22 :745, 1968.
- [13] A.J. Chorin. On the convergence of discrete approximations to the navier stokes equations. *Math. Comput.*, 23 :341, 1969.
- [14] A. Dagan. Numerical consistency and spurious boundary layer in the projection method. *computers et fluids*, 32 :1213–1232, 2003.
- [15] H. Van der Vorst. A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. *SIAM J. Sci. Statist. Comp.*, 13 :631–644, 1992.
- [16] Weinan E and Jian-Guo Liu. Projection method i : convergence and numerical boundary layers. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32 :1017–1057, 1995.
- [17] Weinan E and Jian-Guo Liu. Vorticity boundary conditions and related issues for finite difference schemes. *Journal of computational physics*, 124 :368–382, 1995.
- [18] Weinan E and Jian-Guo Liu. Projection method ii : Godunov-ryabenki analysis. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33 :1597–1621, 1996.
- [19] Weinan E and Jian-Guo Liu. Gauge method for viscous incompressible flows. *Comm. Math. Sci.*, 1 :317–332, 2003.
- [20] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and Praticce of Finite Elements*. Springer, 2004.
- [21] H. Faxen. Forces exerted on a rigid cylinder in a viscous fluid between two parallel fixed planes. *Proc. of a Royal Swedish Academy of Engineering Sciences*, 187 :1, 1946.
- [22] R.P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman, and S. Osher. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *Journal of computationnal physics*, 152 :457, 1999.
- [23] F. Gibou, R.P. Fedkiw, L. Cheng, and M. Kang. A second-order-accurate symmetric discretization of the poisson equation on irregular domains. *Journal of computationnal physics*, 176 :205–227, 2002.

-
- [24] R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Heslaand, and D.D. Joseph. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 25 :755–794, 1999.
- [25] R. Glowinski, T.W. Pan, and J. Periaux. A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by navier-stokes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 112 :133–148, 1994.
- [26] K. Goda. A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two- or three-dimensional cavity flows. *Journal of computational physics*, 30 :76–95, 1979.
- [27] P.M. Gresho and R.L. Sani. On the pressure boundary conditions for the incompressible navier-stokes equations. *International Journal for Numerical methods in fluids*, 7 :1111–1145, 1987.
- [28] J.L. Guermond. Un résultat de convergence a l’ordre deux en temps pour l’approximation des équations de navier stokes par une technique de projection. *Model. Math. Anal. Numér.*, 33 :169–189, 1999.
- [29] J.L. Guermond, P. Minev, and Jie Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. 72, 2005.
- [30] J.L. Guermond and Jie Shen. Quelques résultats nouveaux sur les méthodes de projections. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 333 :1111–1116, 2001.
- [31] J. Happel and H. Brenner. *Low Reynolds number hydrodynamics*. Noordhoff Interational Publishing, 1973.
- [32] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluids with a free surface. *Phys. Fluids*, 8 :2182, 1965.
- [33] C.W. Hirst and B.D. Nichols. Volume of fluid methods for the dynamics of free boundaries. *Journal of computational physics*, 30 :201–255, 1981.
- [34] M. Ismail. *Methode de la frontière élargie pour la résolution de problème elliptique dans des domaines perforés*. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, France, 2004.
- [35] M. Israeli and S.A. Orszag. Numerical simulation of viscous incompressible flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 6 :281–318, 1974.
- [36] M. Israeli, S.A. Orszag, and O. Deville. Boundary conditions for incompressible flows. *Journal of Scientific Computing*, 1 :75–111, 1986.
- [37] J. Janela, A. Lefebvre, and B. Maury. *ESAIM : Proc*, 14 :115–123, 2005.

- [38] Z. Jomaa and C. Macaskill. The embedded finite difference method for the poisson equation in a domain with an irregular boundary and dirichlet boundary conditions. *Journal of computationnal physics*, 202 :488–506, 2005.
- [39] J. Van Kan. A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow. *SIAM J. Sci. Statist. Comp.*, 7 :870–891, 1986.
- [40] G.E. Karniadakis, M. Israeli, and S.A. Orszag. High-order splitting methods for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of computational physics*, 97 :414–443, 1991.
- [41] L. Lee. *Immersed Interface Method for incompressible flow with moving interface*. University of Washington, E-U, 2002.
- [42] A. Lefebvre. Fluid-particles simulations with freefem++. *ESAIM : Proc*, 18 :120–132, 2007.
- [43] R.J. Leveque and J. Oliger. Numerical methods based on additive splitting for hyperbolic partial differential equations. *Mathematics of computation*, 40 :469–497, 1983.
- [44] E. Maitre. Review of numérical methods for free interfaces. *Ecole thématique des Houches : Modèle de champ de phase pour l'évolution de structures complexes*, pages 1–28, 2006.
- [45] G. I. Marchuk. *Handbook of Numerical Analysis, Vol I.* edited by P.G. Ciarlet and J.L Lions, 1990.
- [46] B. Maury. Direct simulation of 2d fluid particle flows in biperiodic domains. *J. Comp. Phys.*, 156 :325–351, 1999.
- [47] B. Maury. A fat boundary method for the poisson problem in a domain with holes. *SIAM J. of Sci. Comput.*, 16 :319–339, 2001.
- [48] P.D. Minev, L.J.P. Timmermans, and F.N. Van De Vosse. An approximate projection scheme for incompressible flow using spectral elements. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 22 :673–688, 1996.
- [49] P. Moin and J. Kim. On the numerical solution of time-dependent viscous incompressible fluid flows involving solid boundaries. *Journal of computational physics*, 35 :381–392, 1980.
- [50] P. Moin and J. Kim. Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of computational physics*, 59 :308–323, 1985.
- [51] J.C. Nave. *Thèse de Troisième cycle*. UCSB, Santa Barbara, E-U, 2004.

-
- [52] N.A. Patankar and N. Sharma. A fast projection scheme for direct numerical simulation of rigid particulate flows. *Comm. Numer. Methods Engrg.*, 21 :419–432, 2005.
 - [53] C.S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of computational physics*, 25 :220–252, 1977.
 - [54] A. Quarteroni, F. Saleri, and A. Veneziani. Analysis of the yosida method for the incompressible navier-stokes equations. *J. Math Pures Appl.*, 78 :473–503, 1999.
 - [55] I. Ramière. *Méthodes de domaine fictif pour des problèmes elliptiques avec conditions aux limites générales en vue de la simulation numérique d'écoulements diphasique*. Université de Provence - Aix-Marseille I, France, 2006.
 - [56] T. Randrianarivelo, G. Pianet, S. Vincent, and J. Caltagirone. Numerical modelling of solid particle motion using a new penalty method. *IJNMF*, 47 :1245–1251, 2007.
 - [57] A. Ben Richou, A. Ambari, M. Lebey, and J.K. Naciri. Drag force on a circular midway between two paralel plates at a very low reynolds numbers. part 2 : moving uniformly (numerical and experimental). *Chemical Engineering Science*, 60, 2005.
 - [58] J. Ritz and J. Caltagirone. a numerical continuous model for hydrodynamics of fluid particle systems. *IJNMF*, 30 :1067–1090, 1999.
 - [59] D. Russell and Z.J. Wang. A cartesian grid method for modeling multiple moving objets in 2d incompressible viscous flow. *Journal of computational physics*, 191 :177–205, 2003.
 - [60] V.K. Saul'ev. On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method. *Siberian Math. Journal*, 4 :912–925, 1963.
 - [61] J. Shen. On error estimates of the projection methods for navier stokes equations : second-order schemes. *Math. Comp.*, 65 :1039–1065, 1996.
 - [62] P. Sonnelved. Cgs : A fast lanczos-type solver fon nonsymmetric linear system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10 :36–52, 1984.
 - [63] J.C. Strikwerda and Y.S. Lee. The accuracy of the fractionnal step method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37, 1999.
 - [64] R. Temam. Remark on the pressure boundary condition for the projection method. *Theoret. Comput. Fluid Dynam.*, 3 :181, 1991.

- [65] P. Vigneaux. *Methodes Level set pour des problèmes d'interface en microfluidique*. Université Bordeaux 1, France, 2007.
- [66] S. Vincent, J. Caltagirone, P. Lubin, and T. Randrianarivelo. An adaptative augmented lagrangian method for three-dimensional multimaterial flows. *Computers and Fluids*, 33 :1273–1289, 2004.

Annexe I

Equation de Navier Stokes en formulation $\phi - \psi$

On considère le problème de Navier Stokes incompressible, dans un domaine borné, régulier Ω :

$$\rho (\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (\text{I.1a})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{I.1b})$$

où $\mathbf{u} = (u, v)$ et $\mathbf{f} = (f^x, f^y)$

En deux dimension ce problème s'écrit sous la forme scalaire suivante

$$\rho (u_t + uu_x + vv_y) = -p_x + \mu \Delta u + f^x \quad (\text{I.2a})$$

$$\rho (u_t + uv_x + vv_y) = -p_y + \mu \Delta v + f^y \quad (\text{I.2b})$$

$$u_x + v_y = 0 \quad (\text{I.2c})$$

En utilisant la définition de la fonction de courant ψ que nous rappelons ici :

$$\begin{cases} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

nous pouvons réécrire le problème (I.2) sous la forme :

$$\rho (\psi_{ty} + \psi_y \psi_{yx} - \psi_x \psi_{yy}) - \mu \Delta \psi_y = -p_x + f^x \quad (\text{I.4a})$$

$$\rho (-\psi_{tx} - \psi_y \psi_{xx} + \psi_x \psi_{xy}) + \mu \Delta \psi_x = -p_y + f^y \quad (\text{I.4b})$$

$$(\text{I.4c})$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} \rho (\psi_t - \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi)_y &= -p_x + \rho (\psi_x \psi_{yy} - \psi_y \psi_{yx}) + f^x \\ -\rho (\psi_t - \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi)_x &= -p_y + \rho (\psi_y \psi_{xx} - \psi_x \psi_{xy}) + f^y \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

De la même manière que pour le problème de Stokes on peut trouver une champ ϕ

conjugué au champ de pression tel que :

$$\begin{cases} \rho\phi_y &= -p_x + \rho(\psi_x\psi_{yy} - \psi_y\psi_{yx}) + f^x \\ -\rho\phi_x &= -p_y + \rho(\psi_y\psi_{xx} - \psi_x\psi_{xy}) + f^y \end{cases} \text{ soit } \rho \nabla^\perp \phi = \nabla p - \rho(\nabla^\perp \psi \cdot \nabla) \nabla^\perp \psi - \mathbf{f}$$
(I.6)

l'équation d'évolution pour ψ ne change pas, elle s'écrit sous la forme

$$\psi_t = \frac{\mu}{\rho} \Delta \psi - \phi$$
(I.7)

En faisant la soustraction des dérivées des équations (I.8), on trouve que ϕ est la solution d'une équation de Poisson :

$$\rho \Delta \phi = -\rho(\nabla^\perp \psi) \cdot \nabla(\Delta \psi) + \nabla \times \mathbf{f}$$
(I.8)

où $\phi(\bullet, t) \in H^2(\Omega)$ et $\psi(\bullet, t) \in L^2(\Omega)$

Annexe II

Algorithmes du Solveur de Poisson

II.1 Algorithme du preconditionneur ILU(0)

Le connaissance d'une approximation \mathbf{M} de la matrice $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sous forme factorisée d'une matrice triangulaire ($\mathbf{M} = \mathbf{LU}$ où \mathbf{L} est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et \mathbf{U} une matrice triangulaire supérieure) est intéressante pour construire un preconditionneur. Un cas extreme est celui où $\mathbf{M} = \mathbf{A} = \mathbf{LU}$ où \mathbf{LU} est la factorisation classique de \mathbf{A} . Le système preconditionné est alors trivial à résoudre et une itération de Krylov suffit à trouver la solution exacte. C est le cas extrême où le preconditionnement est très efficace en terme d'itération mais trop coûteux. En effet pour un système creux, le calcul de la factorisation introduit du remplissage, donc un coût important et une complexité de mise en oeuvre. L'idée de la factorisation incomplète est que l'on peut se permettre d'utiliser une factorisation grossière de \mathbf{A} mais conduisant à des systèmes peut coûteux à résoudre. Pour cela on cherche des matrices $\tilde{\mathbf{L}}$ et $\tilde{\mathbf{U}}$ respectivement triangulaire inférieure à diagonale unité et triangulaire supérieure telles que le reste de la factorisation incomplète ($R = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{A}$) satisfasse certaines conditions, en particulier d'avoir certains coefficients nuls. La méthode de base notée ILU(0) impose que

$$a_{i,j} = 0 \Rightarrow R_{i,j} = 0$$

On donne ci-dessous l'algorithme qui nous a permis le calcul de la factorisation incomplète de \mathbf{A} .

On note $P(\mathbf{A})$ l'ensemble des coordonnées des valeurs non nulles de \mathbf{A} .

```
Pour  $i = 1, \dots, n$ 
  Pour  $k = 1, \dots, i - 1$  et  $(i, k) \in P(A)$  faire :
     $a_{i,k} = a_{i,k} / a_{k,k}$ 
  Pour  $j = k + 1, \dots, n$  et  $(i, j) \in P(A)$  faire :
     $a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} a_{k,j}$ 
  fin pour
fin pour
fin pour
```

II.2 Algorithme de BICGSTAB préconditionné

A la fin des années 80, Sonnelved et Van der Vorst développent des techniques de gradient bi-conjugué basées comme dans le cas de gradient conjugué sur une récurrence d'ordre 2 mais restent encore valables pour des systèmes linéaires non-symétriques. Sonnelved met au point **CGS** (Conjugate Gradient Squared) [62] et Van der Vorst [15] en propose peu après, une amélioration intitulée **BICGSTAB** (bi-Conjugate Gradient Stabilized) dont nous en présentons l'algorithme avec pré-conditionnement

Soient x_0 , ϵ et ϵ_{stop} donnés
 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, $\mathbf{v} = \mathbf{p} = \mathbf{0}$ $\rho_0 = \alpha = \omega = 1$
 Tant que $\frac{\|\mathbf{r}\|_2}{\|\mathbf{r}_0\|_2} > \epsilon$ et $\|\mathbf{r}\|_2 > \epsilon_{stop}$ faire
 $\rho = (\mathbf{r}_0^t \mathbf{r})$
 $\beta = \alpha \rho / \rho_0 \omega$, $\rho_0 = \rho$
 $\mathbf{p} = \mathbf{r} + \beta(\mathbf{p} - \omega \mathbf{v})$
 Résoudre $\mathbf{C}\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}$
 $\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}$
 $\alpha = \rho_1 / (\mathbf{r}_0^t \mathbf{v})$
 $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \alpha \mathbf{v}$
 Résoudre $\mathbf{C}\mathbf{z} = \mathbf{s}$
 ECHANGE BORDS (\mathbf{z})
 $\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{z}$
 $\alpha = (\mathbf{t}^t \mathbf{s}) / (\mathbf{t}^t \mathbf{t})$
 $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \alpha \hat{\mathbf{p}} + \omega \mathbf{z}$
 $\mathbf{r} = \mathbf{s} - \omega \mathbf{t}$
 Fin

Annexe III

Estimation d'erreur sur le problème de Poisson Dirichlet en 1D

On note $\varepsilon^\Delta = \widehat{\delta_x^2 \phi}$ l'erreur commise par la discrétisation en 1D de l'opérateur laplacien (erreur de troncature). Nous choisissons de travailler arbitrairement dans un espace discret d'intervalle $\Omega^x = [x_0, x_N]$, où le domaine de définition du champ ϕ est restreint à l'intervalle $\Omega_\phi^x = [x_1, x_{N-1}] \subset \Omega^x$

L'erreur liée à la discrétisation de l'opérateur laplacien s'écrit sur tous les points du domaine Ω^x sous la forme :

$$\forall i \in [0, N], \varepsilon_i^\Delta = \delta_x^2 \phi_i - \delta_x^2 \phi(x_i) = f_i - \delta_x^2 \phi(x_i) \quad (\text{III.1})$$

Pour déterminer la valeur de ce terme il faut étudier séparément l'erreur qui sera liée à l'écriture de l'opérateur δ_x^2 dans le domaine Ω_ϕ et celui liée uniquement aux bords que l'on va noter x_L pour le point à l'extrémité à gauche $x_L = x_i - \theta_L \Delta x$ et x_R le point à l'extrémité à droite $x_R = x_i + \theta_R \Delta x$ avec $0 \leq \theta_L, \theta_R \leq 1$. Ces points peuvent bien entendu être hors grille.

Par exemple si on se place dans le domaine Ω_ϕ on peut écrire les développements limités suivants

$$\begin{cases} \phi_{i+1} \approx \phi_i + \Delta x \phi'_i + \frac{\Delta x^2}{2} \phi''_i + \frac{\Delta x^3}{6} \phi_i^{(3)} + \frac{\Delta x^4}{24} \phi_i^{(4)} + O(\Delta x^4) \\ \phi_{i-1} \approx \phi_i - \Delta x \phi'_i + \frac{\Delta x^2}{2} \phi''_i - \frac{\Delta x^3}{6} \phi_i^{(3)} + \frac{\Delta x^4}{24} \phi_i^{(4)} + O(\Delta x^4) \end{cases}$$

on obtient ainsi la quantité qui nous intéresse :

$$\varepsilon_i^\Delta = \phi''_i - \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} = -\frac{\Delta x^2}{12} \phi_i^{(4)} + O(\Delta x^4) \quad (\text{III.2})$$

où $\phi_i^{(4)} = \phi^{(4)}(x_i)$.

Maintenant si on se place sur un bord, par exemple $x = x_L$ représenté sur la figure 4.2a. Un traitement linéaire consisterait à écrire les développements limités suivants :

$$\begin{cases} \phi_{i+1} \approx \phi_i + \Delta x \phi'_i + \frac{\Delta x^2}{2} \phi''_i + \frac{\Delta x^3}{6} \phi_i^{(3)} + \frac{\Delta x^4}{24} \phi_i^{(4)} + O(\Delta x^4) \\ \phi_L \approx \phi_i - \theta_L \Delta x \phi'_i + \frac{\theta_L^2 \Delta x^2}{2} \phi''_i - \frac{\theta_L^3 \Delta x^3}{6} \phi_i^{(3)} + \frac{\theta_L^4 \Delta x^4}{24} \phi_i^{(4)} + O(\Delta x^4) \end{cases}$$

En sommant ces deux expressions on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_i^\Delta &= \phi_i'' - \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} - \frac{\phi_i - \phi_L}{\theta_L \Delta x} \right) \\ &= \frac{1 - \theta_L}{2} \phi_i'' - \frac{1 - \theta_L^2}{6} \Delta x \phi_i^{(3)} - \frac{1 - \theta_L^3}{24} \Delta x^2 \phi_i^{(4)} + O(\Delta x^3)\end{aligned}\quad (\text{III.3})$$

Dans notre exemple l'indice $i = 1$, ainsi $\varepsilon_L^\Delta = \varepsilon_1^\Delta$. De la même manière on pourrait calculer $\varepsilon_R^\Delta = \varepsilon_{N-1}^\Delta$ en faisant le même calcul pour un bord qui se situerait à droite (à $i = N - 1$), on écrit alors :

$$\varepsilon_{N-1}^\Delta = \frac{1 - \theta_R}{2} \phi_{N-1}'' - \frac{1 - \theta_R^2}{6} \Delta x \phi_{N-1}^{(3)} - \frac{1 - \theta_R^3}{24} \Delta x^2 \phi_{N-1}^{(4)} + O(\Delta x^3) \quad (\text{III.4})$$

L'erreur $\widehat{\phi}$ satisfait le problème de Poisson discret suivant :

$$\begin{cases} \delta_x^2 \widehat{\phi} &= \varepsilon \\ \widehat{\phi}_L = \widehat{\phi}_R &= 0 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

On va résoudre ce problème de façon linéaire pour obtenir les valeurs de $\widehat{\phi}$. Pour cela nous allons réarranger ce système, en utilisant la relation :

$$\forall k \in [1, N - 1], \quad \delta_x^2 \widehat{\phi}_k = \frac{1}{\Delta x} \left((\delta_x \widehat{\phi})_{k+1} - (\delta_x \widehat{\phi})_{k-1} \right) = \varepsilon_k^\Delta \quad (\text{III.6})$$

ainsi :

$$\forall k \in [0, N - 2], \quad (\delta_x \widehat{\phi})_{k+1} = (\delta_x \widehat{\phi})_{N-1} - \Delta x \sum_{i=k+1}^{N-1} \varepsilon_k^\Delta \quad (\text{III.7})$$

En outre à partir du traitement du linéaire utilisé dans la relation (I), on trouve que :

$$\widehat{\phi}_1 = \theta_L \Delta x (\delta_x \widehat{\phi})_1 \quad (\text{III.8})$$

on injecte (III.7) dans (III.8) pour obtenir :

$$\widehat{\phi}_1 = \theta_L \Delta x^2 \left(\frac{(\delta_x \widehat{\phi})_{N-1}}{\Delta x} - \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_k^\Delta \right) \quad (\text{III.9})$$

On peut réitérer le même calcul dans le domaine Ω_ϕ , par récurrence on obtient alors :

$$\widehat{\phi}_i - \widehat{\phi}_{i-1} = \Delta x (\delta_x \widehat{\phi})_{i-1} \quad (\text{III.10})$$

ce qui nous donne

$$\widehat{\phi}_i = \widehat{\phi}_1 + \sum_{m=1}^{i-1} \Delta x (\delta_x \widehat{\phi})_{m+1} \quad (\text{III.11})$$

en injectant (III.7) et (III.9) dans (III.11) cela nous donne :

$$\widehat{\phi}_i = \Delta x^2 \left(\frac{\theta_L + i - 1}{\Delta x} (\delta_x \widehat{\phi})_{N-1} - \theta_L \sum_{i=1}^{N-1} e_i^\Delta - \sum_{m=1}^{i-1} \sum_{j=m+1}^{N-1} \varepsilon_j^\Delta \right) \quad (\text{III.12})$$

On utilisant III.12 avec $i = N - 1$ et en utilisant le fait que $\widehat{\phi}_{N-1} = \theta_R \Delta x (\delta_x \widehat{\phi})_{N-1}$, on a :

$$(\delta_x \widehat{\phi})_{N-1} = \frac{\Delta x}{N + \theta_L + \theta_R} \sum_{j=1}^{N-1} (j - 1 + \theta_L) \varepsilon_j^\Delta \quad (\text{III.13})$$

Finalement en remplaçant ce terme dans (III.12) et en réarrangeant la double sommation, on obtient finalement :

$$\widehat{\phi}_i = \Delta x^2 \left(\left(\frac{\theta_L + i - 1}{N + \theta_L + \theta_R} - 1 \right) \sum_{j=1}^{N-1} (j - 1 + \theta_L) \varepsilon_j^\Delta - \sum_{j=i+1}^{N-1} (i - j) \varepsilon_j^\Delta \right) \quad (\text{III.14})$$